いくつかの結び目のHeegaard分解とMilnorペアリングの計算例

大倉 拓実
東京工業大学理学院修士課程

概　要

本稿の目的は, 結び目の基本群における Lin の表示 (又は Heegaard 分解) に関し、多くの例を与え、応用を一つ与える事である．特に、ひねり付きプレッツェル結び目という結び目の族を導入し, その族に対して Lin の表示を与えた．その応用として、8 交点以下の非ファイバー結び目と, 3 タングルの奇数型プレッツェル結び目に関して, Milnor ペアリングを与えた.

1　導入

S^3 内の向きづけられた結び目 K に対し, 補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \backslash K)$ を K の結び目群という．結び目群は結び目をおおよそ分類する事が知られている．Alexander 加群 (や多項式) の研究に見られる様に, 結び目群は無限巡回被覆 $\widetilde{M}_K \to S^3 \setminus K$ の研究で大いに役立つ ([Lic] 等参照)．ここで Alexander 加群とはホモロジー群 $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Z})$ の事で、Alexander 多項式とは $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Z})$ を annihilate する最小多項式 $\in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ である．また Blanchfield[Bla] が Alexander 加群上の或る双線型形式を導入したが、その Blanchfield ペアリングは結び目群からある程度計算可能である [Ke1]。一方で、Blanchfield ペアリングの類似として Milnor[Mil1] は有理コホモロジー群 $H^1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ 上のペアリングを導入した．これを Milnor ペアリングと呼ぶ (定理 6.7 参照). Milnor ペアリングは Blanchfield ペアリングないしザイフェルト行列を用い計算できる公式が知られている ([Lit, Theorem A.1] と [Erle, Satz 4.4] 参照)

結び目群を表示する方法としては Wirtinger 表示がよく知られ、ホモロジー群 $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Z})$ の計算に役立つ。しかし Wirtinger 表示は被覆空間のコホモロジー環構造の記述に関して相性が良くなかった．他方で [Lin, Tro] にある通り Heegaard 分解により結び目群の表示を得る事が出来る (6.3 節参照). それによる表示はコホモロジー環の記述に相性が良い事が知られている [Tro]．しかし, Heegaard 分解の具体例は多くはなかった (少ない例として [GS, N1] 参照). 特に非ファイバー結び目については計算例が少なかった.

本論文では、次の問にいち結果を与えた：つまり、多くの非ファイバー結び目を含むような結び目のクラスに対して Heegaard 分解を与えることが出来るか？そのようなクラスとして 3.1 節で説明するひねり付きプレッツェル結び目というものを導入し, Heegaard 分解の計算法を与え、その結び目群のよい表示を与えた (定理 3.5). この結果は 8 交点以下の非ファイバー結び目をすべてカバーする (図 5 参照).

一つの応用として, Milnor ペアリングの計算方法を上記と違った方法として、与えた．Trotter [Tro] の議論を改良する事で、Heegaard 分解によりペアリングを計算する手順が得られる (6.1 節参照)．その手順によって、いくつかの非ファイバー結び目について, Heegaard 分解から Milnor ペアリングの計算例を与えた．例えば、8 交点以下の非ファイバー結び目 (6.2 節) と, 3 タングルの奇数型プレッツェル結び目 (6.3 節) に関して, Milnor ペアリングを計算しきった．この様なペアリングはミルナー [Mil2] で定量的に完全に分類されており, 我々の計算結果はそのような量的情報を取り出している．例えば, 結び目の符号数をその Milnor ペアリングから計算できることを確かめた.

Heegaard 分解による表示は、Milnor ペアリング以外の位相不変量の計算にも将来役立つと思われる。例えば, その表示から捩れ Alexander 多項式が定義でき計算できる ([Lin, N1] 参照)．他にその表示が与えられ

れば、あるクラスの閉 3 次元多様体の普遍被覆空間の胞体構造が与えられている (詳細は [N2] を参照).
謝辞 修士課程の二年間にわたりご指導頂き, 本稿の作成について多くの助言とご指摘を頂いた野坂武史先生, ならびに同じゼミで共に学んだ柳田幸輝氏へ, この場を借りて御礼申し上げます.

2 スパインの誘導する双対語による Lin 表示の構成

はじめに本稿における基本事項を確認したい. ここでは主に**スパイン**, **双対語**, **Heegaard 分解**などの概念について説明する. 尚, 各種定義は参考文献 [KGM] によった.

2.1 Seifert アルゴリズム

K を (S^3 上の) 向きづけられた結び目, D をその正則表示とする. K の Seifert 曲面のひとつを得るためには, D に **Seifert アルゴリズム**を適用すれば良い：

定義 2.1. Seifert アルゴリズムとは, 以下のステップで構成されるアルゴリズムである：

(STEP1) 図式 D 内のすべての交点を, 図 1 に従って置換する. この操作を**平滑化**という. 平滑化された図式は有限個の閉曲線の非交和で構成されるが, これら閉曲線を **Seifert 円周**もしくは単純に**円周**と呼ぶ.

(STEP2) 各 Seifert 円周に対し, その円周を境界に持つような円板を張る. ある円周の内側に別の円周が存在する場合は, 内側の円周を紙面手間側へ少し持ち上げ, 円板同士が交点を持たないようにしておく.

(STEP3) 平滑化により消去した各交点のところで, 交点の両側に存在する 2 つの円板を 180° ひねった帯で連結し, これにより K の Seifert 曲面を得る. 帯のひねり方は, 平滑化前の交点の上下と, ひねられた帯の境界の上下が一致するようにする.

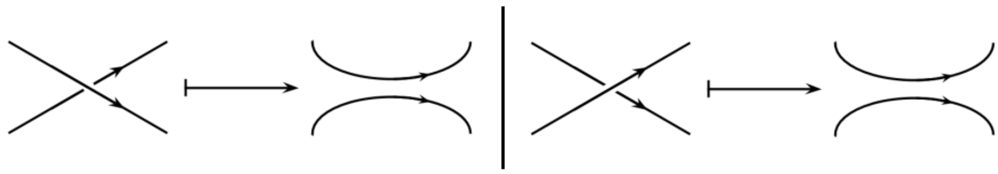

図 1: 交点の平滑化.

また, 本稿では正則表示 D に対し**平面性**という概念を導入する：

定義 2.2. 正則表示 D が**平面的である**とは, D を平滑化した際にどの Seifert 円周の内側にも他の Seifert 円周が存在しないことをいう.

2.2 スパイン

K の Seifert 曲面を F, その F の種数を g とおく.

定義 2.3. いくつかのサークルを一つの基点 $*$ で同一視したものを**ブーケ**と呼ぶ. F に埋め込まれたブーケで F に変位レトラクトなものを, F の**スパイン**といい, 特に次の条件を満たすとき, **正則なスパイン**という：

(条件) F から得られる S^3 への埋め込みが標準的な埋め込みである.

注意 2.4. Seifert アルゴリズムにより得られる Seifert 曲面であれば, 正則なスパインの存在は必ず担保される.

以下, F は正則なスパイン $W = \bigvee_{i=1}^{2g} e_i$ をもち, 各サークル $e_1, e_2, \ldots e_{2g}$ は向きづけられているものとする. F のカラー近傍 $F \times [-1, 1]$ に対し, $W^{\pm} := W \times \{\pm 1\}$, $e_i^{\pm} := e_i \times \{\pm 1\}$ とする. 境界 $\partial(F \times [-1, 1])$ 上には, W^+ の基点 $*^+$ と W^- の基点 $*^-$ とを結ぶアークで, その内点が $W^{\pm}$ と交わらないものが存在する. これを γ とおく.

2.3　双対語と Heegaard 分解

$N(F)$ を F の管状開近傍とすると, $S^3 \backslash N(F)$ は種数 $2g$ のハンドル体であり, $\pi_1(S^3 \backslash N(F))$ は階数 $2g$ の自由群である. γ を一点に縮めた $\partial(F \times [-1,1])$ 上の点を基点として, $\pi_1(S^3 \backslash N(F))$ の生成元 (を表す向きづけられたループ) として $x_1, \ldots, x_{2g}$ をとる.

このとき, 各 e_i^+, e_i^- を $x_1, \ldots, x_{2g}$ を用いて表した語をそれぞれ y_i, z_i と定義する. ループ e_i の張る円盤を D_i として, これら円盤に適当に表裏を定めておく. ループ x_i とは, $2g$ 個の円盤のうち D_i とのみ一度だけ (横断的に) 交わるループであると特徴づけて良い[1]. **双対語** y_1 とは, $*$ を始点に e_1^+ を辿り, D_j を通過する毎に $x_j^{\pm}$ で記録し, e_1^+ を一巡した時点で, 記録された $x_j^{\pm}$ らを左から順に並べて得られる語のことである. $x_j^{\pm}$ の指数は, e_1^+ が D_j の裏から表へ通過すれば+, 表から裏へ通過すれば−と定める. 一般に双対語 y_i,z_i は, 同様に曲面上のループの経路を観察することで構成できる. これら y_i,z_i らを**スパイン W の誘導する双対語**と呼ぶ.

K' を, K に平行で $K' \cap W = \emptyset$ を満たす F 内のサークルとする. $\mathfrak{m} := \gamma \cap (\{*\} \times [-1,1])$ はループで, $\gamma \cap (\bigvee_{i=1}^{2g} D_i) = \emptyset$ より, これは K' のメリディアンと考えて良い. そこで h を $\mathfrak{m}$ の表す $\pi_1(S^3 \backslash K)$ の生成元とすると、van Kampen の定理を用いて以下の結果を得ることができる：

補題 2.5 ([Lin, Tro] による. [KGM, Lemma 1.3.1] 等参照)**.** 次の群同型が存在する：

$$\pi_1(S^3 \backslash K) \cong \langle x_1, x_2, ..., x_{2g}, h \mid r_i := h y_i h^{-1} z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, ..., 2g) \rangle.$$

このような群表示を, 結び目群の **Heegaard 分解**ないし **Lin の表示**と呼ぶ. サイト [KI] にはファイバー結び目の双対語のリストがあり, いくつかの非ファイバー結び目の双対語は参考文献 [GS] で与えられている. また参考文献 [Oha] では, 3 タングルプレッツェル結び目がファイバー結び目であることの必要十分条件を与えている.

3　ひねり付きプレッツェル結び目の導入と双対語の計算

3.1　ひねり付きプレッツェル結び目の定義

本稿では, プレッツェル結び目を一般化した**ひねり付きプレッツェル結び目**というものを考える.

一般に結び目の図式が以下の図 2 左のようにひねられた部分をもつとき, これを整数 a を用いて図 2 右のように略記することにする. ここで $|a|$ はひねりの交点の個数, a の正負はひねりの交点の正負を表す.

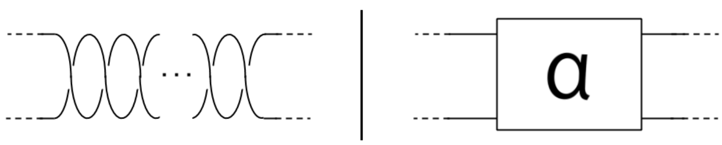

図 2: 図式の略記. 左は正の交点からなるひねりである.

このとき, 正の整数 n, $a_i \in \mathbb{Z} (1 \leqq i \leqq n)$ に対して, (n タングル) プレッツェル絡み目 $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とは下図 3 の左側ような図式で表される絡み目のことを云う：

図 3 の左側において, 図式の左側, 右側の部分にさらにひねりを加えることを考える：

図 3 のような図式 D を, 本稿ではその図式を指定する各整数 a_i, b_i, c_i を用いて

$$D = (a_{1_{(b_1, c_1)}} a_{2_{(b_2, c_2)}} \ldots a_{n-1_{(b_{n-1}, c_{n-1})}} a_n).$$

[1] $i \neq j$ のとき, $D_i \cap D_j = \{*\}$, $D_i \cap \gamma = \emptyset$ が成立することに注意する.

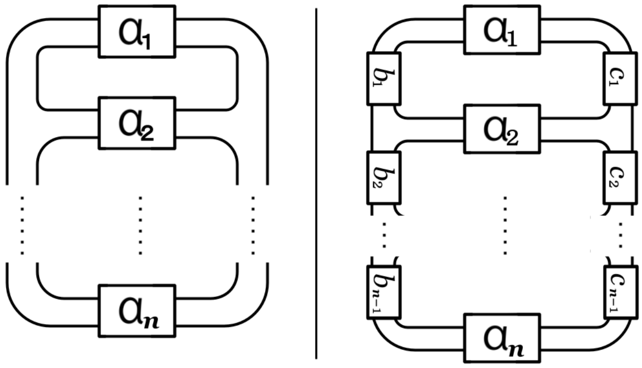

図 3: プレッツェル結び目とひねり付きプレッツェル結び目.

のように表記する.

定義 3.1. 図式 $D = ({a_1}_{(b_1,c_1)} {a_2}_{(b_2,c_2)} \dots {a_{n-1}}_{(b_{n-1},c_{n-1})} a_n)$ が表す絡み目の成分数が 1 のとき, これを**ひねり付きプレッツェル結び目**と呼び, $P(D)$ もしくは $P({a_1}_{(b_1,c_1)} {a_2}_{(b_2,c_2)} \dots {a_{n-1}}_{(b_{n-1},c_{n-1})} a_n)$ と表記する.

注意 3.2. 任意の i で $b_i = c_i = 0$ となる場合,

$$P({a_1}_{(b_1,c_1)} {a_2}_{(b_2,c_2)} \dots {a_{n-1}}_{(b_{n-1},c_{n-1})} a_n) = P(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

が成り立つため, 通常のプレッツェル結び目は確かにひねり付きプレッツェル結び目の特別な場合である.

注意 3.3. Reidemeister 移動により,

$$P({a_1}_{(b_1,c_1)} {a_2}_{(b_2,c_2)} \dots {a_{n-1}}_{(b_{n-1},c_{n-1})} a_n) = P((a_1+b_1+c_1)_{(0,0)} {a_2}_{(b_2,c_2)} \dots {a_{n-1}}_{(0,0)} (b_{n-1}+c_{n-1}+a_n))$$

が常に成立することが容易にわかる. これを受けて $b_1, c_1, b_{n-1}, c_{n-1}$ をすべて 0 と仮定することも可能だが, 本稿では一貫して $P({a_1}_{(b_1,c_1)} {a_2}_{(b_2,c_2)} \dots {a_{n-1}}_{(b_{n-1},c_{n-1})} a_n)$ という表記をとることにする.

3.2 ひねり付きプレッツェル結び目の双対語

定義 3.4. $\mathbb{Q}$ 上のベクトル $V_i := \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ に対し, $\mathop{\circ}_{i=1}^{n} V_i := V_1 \circ V_2 \circ \cdots \circ V_n := \begin{pmatrix} u_1 u_2 \cdots u_n \\ v_1 v_2 \cdots v_n \end{pmatrix}$ を定める.

定理 3.5. 図式 $D = ({a_1}_{(b_1,c_1)} {a_2}_{(b_2,c_2)} \dots {a_{n-1}}_{(b_{n-1},c_{n-1})} a_n)$ が平面的であると仮定する. $\mathbb{Z}[G]$ を $x_1, \dots, x_{2g}$ により生成される自由群の群環とし,

$$d_m := \sum_{j=0}^{m} c_j \ , \ c_0 := 0 \ , \ x_0 := 1 \ , \ c_n := 1 \ , \ J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく.

このとき, 結び目 $P(D)$ には (ある Seifert 曲面の) 正則スパイン W が存在し, 円板の表裏と各ループの向きを適切に設定することで, W の誘導する双対語を成分とするベクトル $\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ が次の $\mathbb{Z}[F]$ 上の行列の演算に一致するようにできる：

$$\left(\mathop{\circ}_{j=0}^{i-1} \left(J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \circ \left(J^{d_{i-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_{i-1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\circ \left(J^{d_{i-1}+a_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{b_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i} \begin{pmatrix} 0 & x_{i+1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\circ \left(\mathop{\circ}_{k=0}^{i-1} \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i+a_{i+1}+(d_i-d_{i-k})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{i-k}^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_{i-k}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right).$$

例 3.6. 3 タングルプレッツェル結び目の場合を考えたい．図式 $D=(a_{1_{(0,0)}}a_{2_{(0,0)}}a_3)$ が平面的であることが，a_1,a_2,a_3 がすべて奇数であることと同値となることは容易に確かめられる．従って奇数型プレッツェル結び目 $P(2p+1,2q+1,2r+1)$ のみを考える．このとき双対語は，定理 3.5 を用いると以下のように計算される：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{2p+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\circ\left(J\begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ x_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{2q+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ x_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{2q+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\circ\left(J\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{2r+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

本稿では $\mathbb{Z}[G]$ に属する語 $W=\prod_{k=1}^{n}x_{i_k}^{\epsilon_k}$(すべての k について$\epsilon_k=\pm1$) に対して，各添字を表すベクトル $\mathrm{Sub}(W):=(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ と，各指数を表す $\mathrm{Ind}(W):=(\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n)$ とを定義する．W は二つのベクトル $\mathrm{Sub}(W),\mathrm{Ind}(W)$ の組み合わせによって表記できることに注意する．

たとえば双対語 y_1,y_2 は，この表記法を用いると以下のように書くことが出来る：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sub}(y_1) &= (\overbrace{1,1,\ldots,1}^{|p|\text{ 個}},\overbrace{\sigma_-(2q+1),\sigma_+(2q+1),\sigma_-(2q+1),\sigma_+(2q+1),\ldots,\sigma_-(2q+1)}^{|2q+1|\text{ 個}}),\\
\mathrm{Ind}(y_1) &= (\underbrace{-\sigma(2p+1),-\sigma(2p+1),\ldots,-\sigma(2p+1)}_{|p|\text{ 個}},\underbrace{-1,1,-1,1,\ldots,-1}_{|2q+1|\text{ 個}}),\\
\mathrm{Sub}(y_2) &= (\overbrace{\sigma_-(2q+1),\sigma_+(2q+1),\sigma_-(2q+1),\sigma_+(2q+1),\ldots,\sigma_-(2q+1)}^{|2q+1|\text{ 個}},\overbrace{2,2,\ldots,2}^{|r|\text{ 個}}),\\
\mathrm{Ind}(y_2) &= (\underbrace{1,-1,1,-1,\ldots,1}_{|2q+1|\text{ 個}},\underbrace{-\sigma(2r+1),-\sigma(2r+1),\ldots,-\sigma(2r+1)}_{|r|\text{ 個}}).
\end{aligned}$$

ただし $\sigma(z)$ は整数 z の符号とする．即ち z が正のとき 1, 負のとき -1, そして 0 のときは 0 の値をとる．また $\sigma_+(z):=\frac{3+\sigma(z)}{2},\sigma_-(z):=\frac{3-\sigma(z)}{2}$ と定義する．

定理 3.5 **の証明**．(お急ぎの場合は読み飛ばして良い) Seifert アルゴリズムにより $P(D)$ の Seifert 曲面 F を得る．D は平面的であると仮定したため，F 上には下図 4 のようにスパインをとることができる：

曲面 F の，整数 a_i に対応するひねられた部分を，A_i と表す．B_i,C_i も同様に定義する．このとき，基点 $*$ を始点とするループ e_i は，一般に F 上の次のような経路を辿る：

経路 1：$*$ から出発し，$C_1,C_2,\ldots,C_{i-1}$ を順に通過する．$i=1$ の場合，どのひねられた部分も通過しない．

経路 2：A_i,B_i,A_{i+1} を順に通過する．

経路 3：$C_i,C_{i-1},\ldots,C_1$ を順に通過し，点 $*$ へ戻る．

これより，各経路での e_i^+ と円板との交差を考察する．F のカラー近傍を，図 4 において $*^+$ が紙面手前側に存在するようにとる．また各円板 D_i の表裏を紙面手前側が裏面となるように定める．

(経路 1)

$i\neq1$ とする．e_i^+ は C_j を通過する直前，F の交点を $\sum_{k=0}^{j-1}|c_k|$ 個通過する．$\sum_{k=0}^{j-1}|c_k|$ と d_{j-1} の偶奇は一

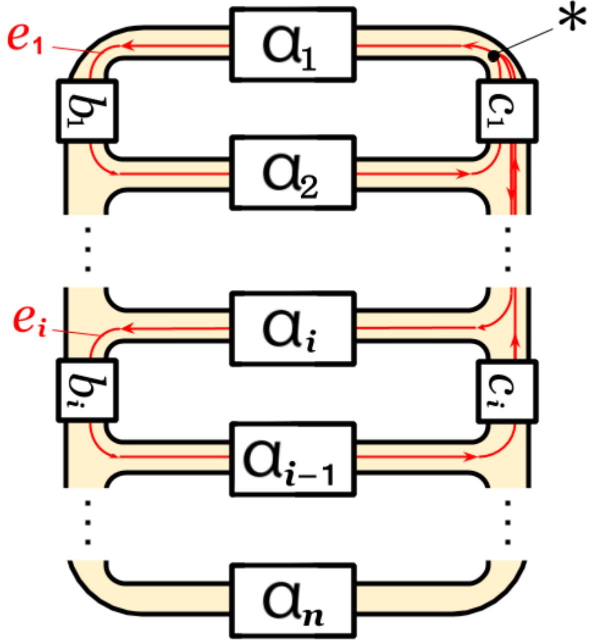

図 4: スパインのとり方.

致する．はじめ $*^+$ にある点が, e_i^+ を辿って C_j を通過する際, 長さ $|c_j|$ の語 S_j を次のように定義する：

$$S_j := \begin{cases} x_j 1 x_j 1 \cdots & c_j \geq 0 \text{ かつ } d_{j-1} \text{が偶数の時} \\ 1 x_j^{-1} 1 x_j^{-1} \cdots & c_j < 0 \text{ かつ } d_{j-1} \text{が偶数の時} \\ 1 x_j 1 x_j \cdots & c_j \geq 0 \text{ かつ } d_{j-1} \text{が奇数の時} \\ x_j^{-1} 1 x_j^{-1} 1 \cdots & c_j < 0 \text{ かつ } d_{j-1} \text{が奇数の時} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

積 $S_1 S_2 \cdots S_{i-1}$ は，経路 1 全体における e_i^+ の y_i への寄与 $y_i^{(1)}$ と一致する．即ち

$$\begin{aligned} y_i^{(1)} &= \prod_{j=0}^{i-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathop{\circ}\limits_{j=0}^{i-1} \left[J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] . \end{aligned} \tag{1}$$

$i = 1$ の場合は $y_1^{(1)} = 1$ と定義する．実際上式に $i = 1$ を代入した結果は 1 となる．

また, e_i^- について同様に $z_i^{(1)}$ を考えることができるが, これは上式の各 d_{j-1} を $d_{j-1} + 1$ に変換するだけで求まる．よく考えると上式の (1) と同様に,

$$z_i^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathop{\circ}\limits_{j=0}^{i-1} \left[J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] .$$

を得る．従って次が成立する：

$$\begin{pmatrix} y_i^{(1)} \\ z_i^{(1)} \end{pmatrix} = \mathop{\circ}\limits_{j=0}^{i-1} \left[J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] .$$

(経路 3)

C_j 通過直前までに e_i^+ が通過した交点の個数を e_j とおく．e_j の偶奇は $d_{i-1} + a_i + b_i + a_{i+1} + (d_i - d_j)$ の偶奇と一致する．e_i^+ が C_j を通過するとき, 長さ $|c_j|$ の語 S'_j を次のように定義する：

$$\begin{aligned} S'_j &:= \begin{cases} 1 x_j^{-1} 1 x_j^{-1} \cdots & c_j \geq 0 \text{ かつ } e_j \text{が偶数の時} \\ x_j 1 x_j 1 \cdots & c_j < 0 \text{ かつ } e_j \text{が偶数の時} \\ x_j^{-1} 1 x_j^{-1} 1 \cdots & c_j \geq 0 \text{ かつ } e_j \text{が奇数の時} \\ 1 x_j 1 x_j \cdots & c_j < 0 \text{ かつ } e_j \text{が奇数の時} \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} J^{d_{i-1}+a_i+b_i+a_{i+1}+(d_i-d_j)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_j^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

積 $S'_i S'_{i-1} \cdots S'_1$ は，経路 3 全体における e_i^+ の y_i への寄与 $y_i^{(3)}$ と一致する．e_i^- についても同様に $z_i^{(3)}$ を定義すると，(経路 1) と同様に次の式が得られる：

$$\begin{pmatrix} y_i^{(3)} \\ z_i^{(3)} \end{pmatrix} = \mathop{\bigcirc}_{k=0}^{i-1} \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i+a_{i+1}+(d_i-d_{i-k})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{i-k}^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_{i-k}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(経路 2)

e_i^+ は A_i を通過する直前，F の交点を $\sum_{k=0}^{i-1} |c_k|$ 個通過する．$\sum_{k=0}^{i-1} |c_k|$ と d_{i-1} の偶奇は一致する．e_i^+ が A_i を通過するとき，長さ $|a_i|$ の語 S^A を次のように定義する：

$$S^A := \begin{cases} x_{i-1}x_i^{-1}x_{i-1}x_i^{-1}\cdots & a_j \geq 0 \text{ かつ } d_{i-1}\text{が偶数の時} \\ x_i x_{i-1}^{-1} x_i x_{i-1}^{-1} \cdots & a_j < 0 \text{ かつ } d_{i-1}\text{が偶数の時} \\ x_i^{-1}x_{i-1}x_i^{-1}x_{i-1}\cdots & a_j \geq 0 \text{ かつ } d_{i-1}\text{が奇数の時} \\ x_{i-1}^{-1}x_i x_{i-1}^{-1} x_i \cdots & a_j < 0 \text{ かつ } d_{i-1}\text{が奇数の時} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} J^{d_{i-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_{i-1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

e_i^+ が A_{i+1} を通過するときも，同様に長さ $|a_{i+1}|$ の語 S_A を定義する：

$$S_A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} J^{d_{i-1}+a_i+b_i} \begin{pmatrix} 0 & x_{i+1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

e_i^+ が B_i を通過するときも，(経路 1) の S_j と同様に長さ $|b_i|$ の語 S^B を定義する：

$$S^B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} J^{d_{i-1}+a_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{b_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

積 $S^A S^B S_A$ は経路 2 全体における e_i^+ の y_i への寄与 $y_i^{(2)}$ と一致する．e_i^- についても同様に $z_i^{(3)}$ を定義すると，(経路 1) と同様の考察から次の式が得られる：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_i^{(2)} \\ z_i^{(2)} \end{pmatrix} &= \left(J^{d_{i-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_{i-1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \left(J^{d_{i-1}+a_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{b_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\circ \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i} \begin{pmatrix} 0 & x_{i+1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

以上の議論により, 最終的に次の結果を得る：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_i^{(1)} \\ z_i^{(1)} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_i^{(2)} \\ z_i^{(2)} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_i^{(3)} \\ z_i^{(3)} \end{pmatrix} \\ &= \left(\mathop{\bigcirc}_{j=0}^{i-1} \left(J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \circ \left(J^{d_{i-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_{i-1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\circ \left(J^{d_{i-1}+a_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{b_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i} \begin{pmatrix} 0 & x_{i+1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\circ \left(\mathop{\bigcirc}_{k=0}^{i-1} \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i+a_{i+1}+(d_i-d_{i-k})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{i-k}^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_{i-k}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

4　9 交点以下の非ファイバー結び目の双対語の計算

下図 5 は, 交点数 8 以下の全ての非ファイバー結び目について, Reidemeister 移動により平面的な図式を得て, Seifert アルゴリズムを施し, 各 Seifert 曲面の表と裏をそれぞれ赤色, 青色で塗り分けたものである：

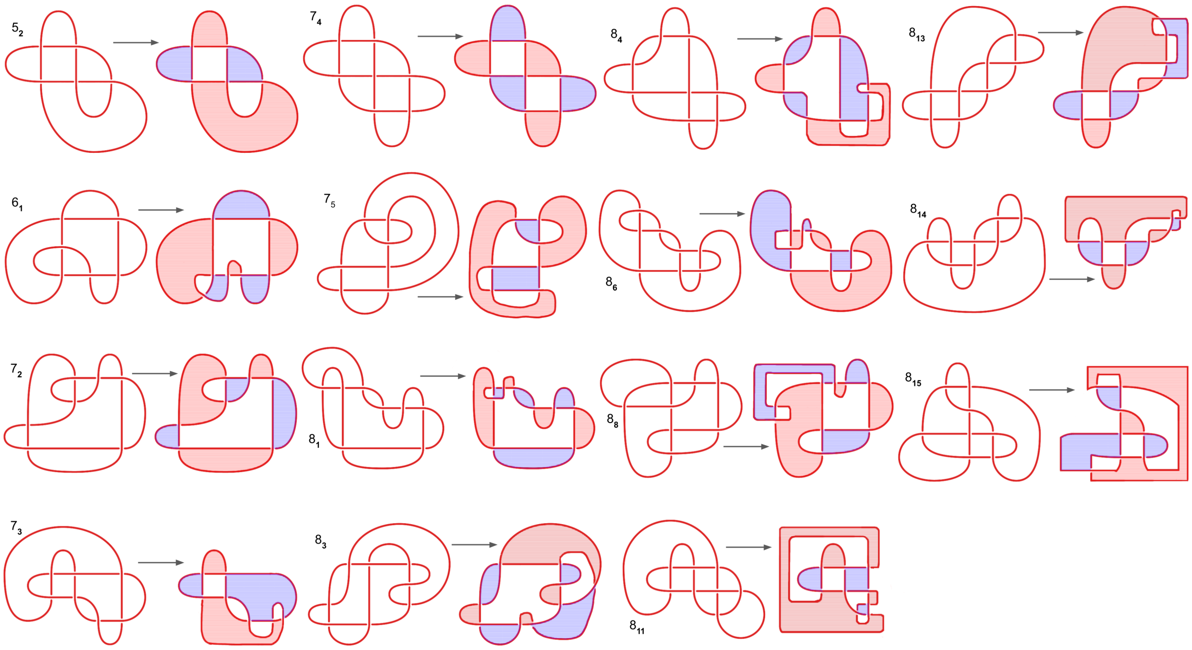

図 5: 8 交点以下の非ファイバー結び目.(図式はサイト [KI] によった)

9 交点の非ファイバー結び目の大部分についても, 同様の方法で平面的な図式を得た：

図 5,6 の各曲面から, $9_{16}, 9_{19}, 9_{38}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}$ を除く 9 交点以下の非ファイバー結び目はすべて, 平面的な図式によってひねりつきプレッツェル結び目としてみなせることが分かる．各結び目を定義 3.1 の方法で表記したものを以下にまとめる：

$$
\begin{array}{rcl}
5_2 & = & P(-3_{(0,0)}-1_{(0,0)}-1), \\
6_1 & = & P(-5_{(0,0)}1_{(0,0)}1), \\
7_2 & = & P(-1_{(0,0)}-1_{(0,0)}-5), \\
7_3 & = & P(-3_{(0,0)}-1_{(0,0)}-1_{(0,0)}-1_{(0,0)}-1), \\
7_4 & = & P(-3_{(0,0)}-1_{(0,0)}-3), \\
7_5 & = & P(-1_{(0,0)}-1_{(-1,-1)}-1_{(0,0)}-1_{(0,0)}-1), \\
8_1 & = & P(1_{(0,0)}1_{(0,0)}-7), \\
8_3 & = & P(1_{(0,0)}3_{(0,0)}-5), \\
8_4 & = & P(-5_{(0,0)}1_{(0,0)}1_{(0,0)}1_{(0,0)}1), \\
8_6 & = & P(1_{(0,0)}1_{(-1,-3)}-1_{(0,0)}-1_{(0,0)}-1), \\
8_8 & = & P(-1_{(0,0)}-1_{(0,0)}-1_{(0,4)}1_{(0,0)}1), \\
8_{11} & = & P(-1_{(0,0)}-3_{(0,0)}-1_{(0,-2)}1_{(0,0)}1),
\end{array}
$$

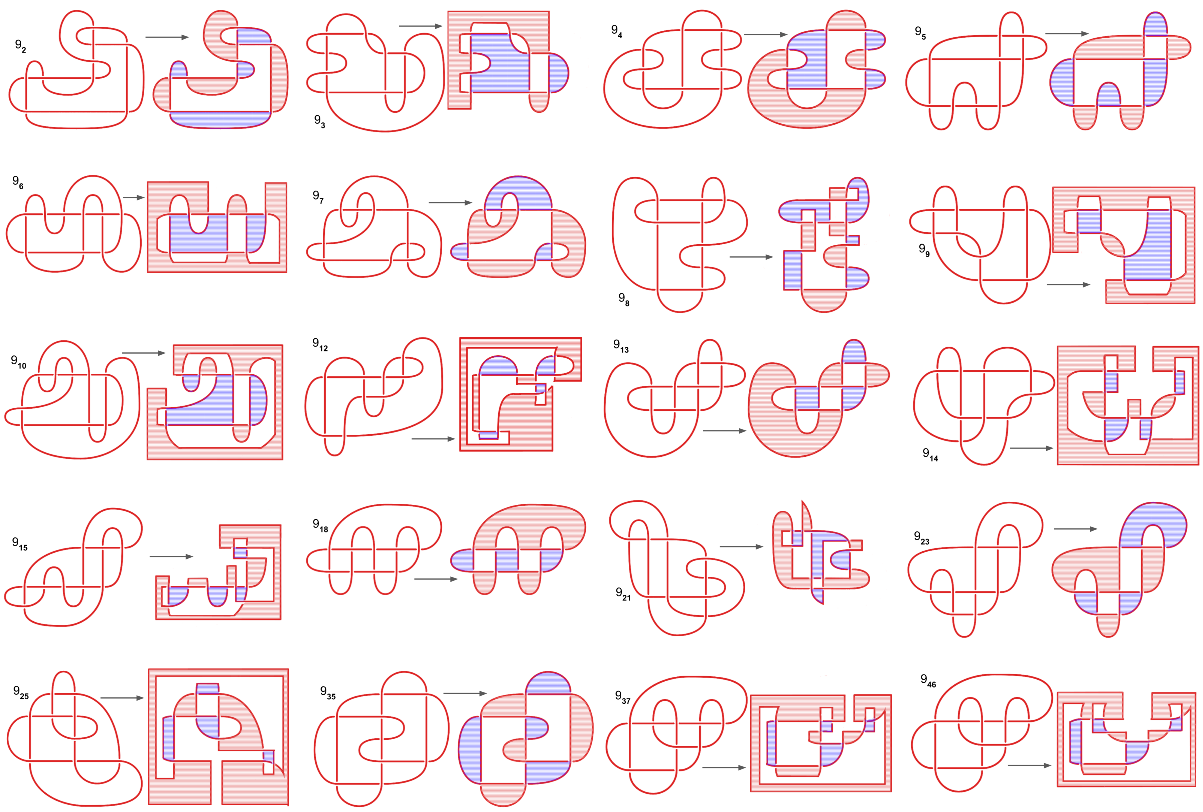

図 6: $9_{16}, 9_{19}, 9_{38}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}$ を除く 9 交点の非ファイバー結び目.(図式はサイト [KI] によった)

$$
\begin{aligned}
8_{13} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,2)} 1_{(0,0)} 3),\\
8_{14} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-2,0)} - 1_{(-2,0)} 1_{(0,0)} 1),\\
8_{15} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-1,0)} - 2_{(-1,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{2} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 7),\\
9_{3} &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{4} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 5),\\
9_{5} &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 5),\\
9_{6} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,-2)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{7} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-3,-1)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{8} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(1,-1)} - 1_{(0,6)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{9} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(-2,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{10} &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{12} &= P(1_{(0,0)} 1_{(-1,0)} - 4_{(-1,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{13} &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(-1,-1)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{14} &= P(1_{(0,0)} 1_{(0,-2)} - 1_{(0,-2)} 1_{(0,0)} 3),\\
9_{15} &= P(1_{(0,0)} 1_{(-2,0)} - 1_{(4,0)} 1_{(0,0)} 1),\\
9_{18} &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(-2,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{21} &= P(1_{(0,0)} 1_{(0,-2)} - 1_{(2,0)} 1_{(0,0)} 3),\\
9_{23} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-1,-1)} - 1_{(0,-2)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
9_{25} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,-1)} - 2_{(-1,-2)} 1_{(0,0)} 1),\\
9_{35} &= P(-3_{(0,0)} - 3_{(0,0)} - 3),\\
9_{37} &= P(1_{(0,0)} 1_{(0,-2)} - 3_{(0,-2)} 1_{(0,0)} 1),
\end{aligned}
$$

$$9_{46} \quad = \quad P(1_{(0,0)}1_{(0,-2)}3_{(0,2)} - 1_{(0,0)} - 1).$$

9 交点の非ファイバー結び目には $9_{16}, 9_{19}, 9_{38}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}$ が残っているが, これらをひねり付きプレッツェル結び目としてみなすための平面的な図式が存在するか否かはわかっていない. 今後の課題である.

各ひねり付きプレッツェル結び目を表す整数を定理 3.5 の式に代入することで, $9_{16}, 9_{19}, 9_{38}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}$ を除く 9 交点以下の非ファイバー結び目の双対語をすべて計算できる. *Mathematica* による計算結果を以下にまとめる. なお, 使用したコードは付録 A に添付した：

	y_1	z_1	y_2	z_2
5_2	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	x_2	$x_1^{-1}x_2$
6_1	x_1^2	$x_1^2x_2$	$x_1x_2^{-1}$	x_2^{-1}
7_2	$x_1x_2^{-1}$	x_1	x_2^3	$x_1^{-1}x_2^3$
7_3	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$
7_4	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	x_2^2	$x_1^{-1}x_2^2$
7_5	$x_1x_2^{-1}$	x_1	x_2^2	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$
8_1	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_2^3$	x_2^3
8_3	$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}$	$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2$	$x_1x_2^{-1}x_1x_2^2$	$x_2^{-1}x_1x_2^2$
8_4	x_1^2	$x_1^2x_2$	$x_1x_2^{-1}$	$x_2^{-1}x_3$
8_6	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_2^2$	$x_3^{-1}x_2^2$
8_8	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$
8_{11}	$x_1x_2^{-1}x_1x_2^{-1}$	$x_1x_2^{-1}x_1$	$x_2x_1^{-1}x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2$
8_{13}	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$
8_{14}	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2^2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2^2$
8_{15}	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2^2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$
9_2	$x_1x_2^{-1}$	x_1	x_2^4	$x_1^{-1}x_2^4$
9_3	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$
9_4	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$
9_5	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	x_2^3	$x_1^{-1}x_2^3$
9_6	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$
9_7	$x_1x_2^{-1}$	x_1	x_2^3	$x_1^{-1}x_2^2x_3^{-1}x_2$
9_8	$x_1x_2^{-1}$	x_1	x_2	$x_1^{-1}x_3^{-1}x_2$
9_9	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$
9_{10}	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	$x_2x_3^{-1}x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$
9_{12}	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_2x_3^{-1}x_2x_3^{-1}$	$x_3^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$
9_{13}	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	x_2^2	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$
9_{14}	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_3^{-1}x_2$	x_2
9_{15}	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_2x_3^{-1}$	x_2
9_{18}	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$
9_{21}	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_3^{-1}x_2$	x_2
9_{23}	$x_1x_2^{-1}$	x_1	x_2^2	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$
9_{25}	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2x_3^{-1}x_2$	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$
9_{35}	$x_1^2x_2^{-1}x_1x_2^{-1}$	$x_1^2x_2^{-1}x_1$	$x_2x_1^{-1}x_2^2$	$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^2$
9_{37}	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_3^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$	$x_3^{-1}x_2^2$
9_{46}	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_2^{-1}x_3$	$x_2^{-1}x_3x_2^{-1}x_3x_2$

	y_3	z_3	y_4	z_4	y_5	z_5	y_6	z_6
5_2	-	-	-	-	-	-	-	-
6_1	-	-	-	-	-	-	-	-
7_2	-	-	-	-	-	-	-	-
7_3	$x_3x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3$	x_4	$x_3^{-1}x_4$	-	-	-	-
7_4	-	-	-	-	-	-	-	-
7_5	$x_2^{-1}x_3$	$x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_2$	$x_3^{-1}x_4$	$x_2^{-1}x_4x_2$	-	-	-	-
8_1	-	-	-	-	-	-	-	-
8_3	-	-	-	-	-	-	-	-
8_4	$x_2x_3^{-1}$	$x_3^{-1}x_4$	$x_3x_4^{-1}$	x_4^{-1}	-	-	-	-
8_6	$x_2^{-2}x_3x_2$	$x_2^{-2}x_3x_4^{-1}x_2^2$	$x_2^{-1}x_3^{-1}x_4x_2$	$x_2^{-2}x_4x_2^2$	-	-	-	-
8_8	x_3^{-2}	$x_2^{-1}x_4x_3^{-2}$	$x_3^3x_4^{-1}x_3^{-2}$	$x_3^2x_4^{-1}x_3^{-2}$	-	-	-	-
8_{11}	x_3	$x_2^{-1}x_4x_3$	$x_4^{-1}x_3$	$x_3^{-1}x_4^{-1}x_3$	-	-	-	-
8_{13}	x_3^{-1}	$x_2^{-1}x_4x_3^{-1}$	$x_3^2x_4^{-2}x_3^{-1}$	$x_3x_4^{-2}x_3^{-1}$	-	-	-	-
8_{14}	x_3	$x_2^{-1}x_3x_4$	$x_3x_4^{-1}$	x_4^{-1}	-	-	-	-
8_{15}	$x_3x_2^{-1}x_3x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3^2$	x_4	$x_3^{-1}x_4$	-	-	-	-
9_2	-	-	-	-	-	-	-	-
9_3	$x_3x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3$	$x_4x_5^{-1}$	$x_3^{-1}x_4$	$x_5x_6^{-1}$	$x_4^{-1}x_5$	x_6	$x_5^{-1}x_6$
9_4	$x_3x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3$	x_4^3	$x_3^{-1}x_4$	-	-	-	-
9_5	-	-	-	-	-	-	-	-
9_6	$x_3x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3$	$x_4x_5^{-1}$	$x_3^{-1}x_4$	$x_5x_6^{-1}x_5$	$x_4^{-1}x_5^2$	$x_5^{-1}x_6x_5$	$x_5^{-2}x_6x_5$
9_7	$x_2^{-1}x_3$	$x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_2$	$x_3^{-1}x_4$	$x_2^{-1}x_4x_2$	-	-	-	-
9_8	$x_2^{-1}x_3^{-2}$	$x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_3^{-3}x_2$	$x_3^2x_4x_3^{-3}$	$x_2^{-1}x_3^3x_4x_3^{-3}x_2$	-	-	-	-
9_9	$x_3^2x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3^2$	$x_4x_5^{-1}$	$x_3^{-1}x_4$	$x_5x_6^{-1}$	$x_4^{-1}x_5$	x_6	$x_5^{-1}x_6$
9_{10}	$x_3x_2^{-1}x_3x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3x_2^{-1}x_3$	x_4	$x_3^{-1}x_4$	-	-	-	-
9_{12}	$x_3x_2^{-1}x_3x_2^{-1}x_3x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3x_2^{-1}x_3^2$	x_4	$x_3^{-1}x_4$	-	-	-	-
9_{13}	$x_2^{-1}x_3$	$x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_2$	$x_3^{-1}x_4$	$x_2^{-1}x_4x_2$	-	-	-	-
9_{14}	$x_2^{-1}x_3x_2$	$x_2^{-2}x_4x_3x_2$	$x_2^{-1}x_4^{-2}x_3x_2$	$x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-2}x_3x_2$	-	-	-	-
9_{15}	x_3^{-2}	$x_2^{-1}x_3^{-2}x_4$	$x_3x_4^{-1}$	x_4^{-1}	-	-	-	-
9_{18}	$x_3^2x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3^2$	x_4	$x_3^{-1}x_4$	-	-	-	-
9_{21}	$x_2^{-1}x_3^{-1}x_2$	$x_2^{-2}x_3^{-1}x_4x_2$	$x_2^{-1}x_3x_4^{-2}x_2$	$x_2^{-1}x_4^{-2}x_2$	-	-	-	-
9_{23}	$x_2^{-1}x_3^2$	$x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_3x_2$	$x_3^{-2}x_4x_3$	$x_2^{-1}x_3^{-1}x_4x_3x_2$	-	-	-	-
9_{25}	$x_2^{-1}x_3x_4x_3$	$x_2^{-1}x_3x_2^{-1}x_3x_2$	$x_3^{-1}x_4^{-1}x_3$	$x_2^{-1}x_4^{-1}x_3x_2$	-	-	-	-
9_{35}	-	-	-	-	-	-	-	-
9_{37}	$x_2^{-1}x_3x_2^{-1}x_3x_2$	$x_2^{-2}x_3x_2^{-1}x_4x_3x_2$	$x_2^{-1}x_4^{-1}x_3x_2$	$x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}x_3x_2$	-	-	-	-
9_{46}	$x_3^{-1}x_2x_4^{-1}x_3^{-1}x_2$	$x_2^{-1}x_3^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$	$x_2^{-1}x_3x_4x_3^{-1}x_2$	$x_2^{-1}x_4x_3^{-1}x_2$	-	-	-	-

5　ひねり付きプレッツェル結び目の縦線

$D = (a_{1_{(b_1,c_1)}} a_{2_{(b_2,c_2)}} \ldots a_{n-1_{(b_{n-1},c_{n-1})}} a_n)$ を平面的な図式とし, K をひねり付きプレッツェル結び目 $P(D)$ とする. また, F は D に Seifert アルゴリズムを施して得られる種数 $2g$ の Seifert 曲面とし, 3.5 の証明と同様に, F のスパインを図 4 のようにとるものとする. この節では $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の縦線 $\mathfrak{l}_K$ を, K の双対語を用いて表記したい. その為には, 縦線を F のスパインを構成するループ $e_1, e_2, ..., e_{2g}$ によって, $\mathfrak{l}_K = e_{i_1}^{\epsilon_1} e_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots e_{i_m}^{\epsilon_m}$(各 ϵ_{i_j} は 1 か -1) のように表すので十分である. 実際 $e_{i_1}^{\epsilon_1} e_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots e_{i_m}^{\epsilon_m}$, $y_{i_1}^{\epsilon_1} y_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots y_{i_m}^{\epsilon_m}$, $z_{i_1}^{\epsilon_1} z_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots z_{i_m}^{\epsilon_m}$ は定義より同じ基本群の元である.

定理 5.1. $K = P(D)$ の縦線について, 以下が成り立つ：
(1) 全ての a_i が奇数であり, かつ全ての b_i, c_i が偶数のとき,

$$\mathfrak{l}_K = e_1 e_3 \cdots e_{2g-1} (e_1 e_2 \cdots e_{2g})^{-1} e_2 e_4 \cdots e_{2g}.$$

(2) 全ての a_i およびが b_2, c_2 奇数であり, かつ b_2, c_2 を除く全て b_i, c_i が偶数のとき,

$$\mathfrak{l}_K = e_1 (e_2 e_4 \cdots e_{2g})^{-1} e_1^{-1} e_2 e_3 \cdots e_{2g} (e_3 e_5 \cdots e_{2g-1})^{-1}.$$

証明. (1) の場合について示す.
$\pi_1(S^3 \setminus K)$ の緯線とは K に同相な F 上のループに他ならない. そこで F の基点 $*$ から出発し, K を辿って再び $*$ に戻るようなループを考えたい. 一般に図 7 のように α 回ひねられた部分を辿る際は, ひねりの回数を指定する整数 α の偶奇によって通過の様子が変わることに注意する：

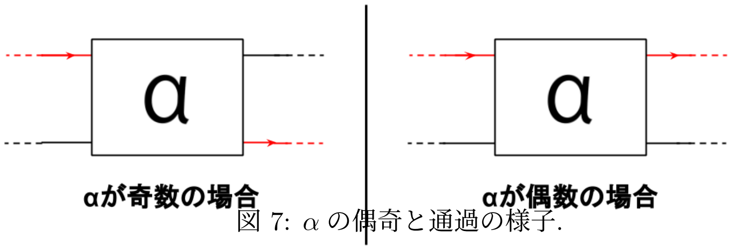

図 7: α の偶奇と通過の様子.

(1) の場合, 全ての a_i が奇数であり, 全ての b_i, c_i が偶数であるから, 図式 $P(D)$ は下図 9 のように向き付けることが出来る：

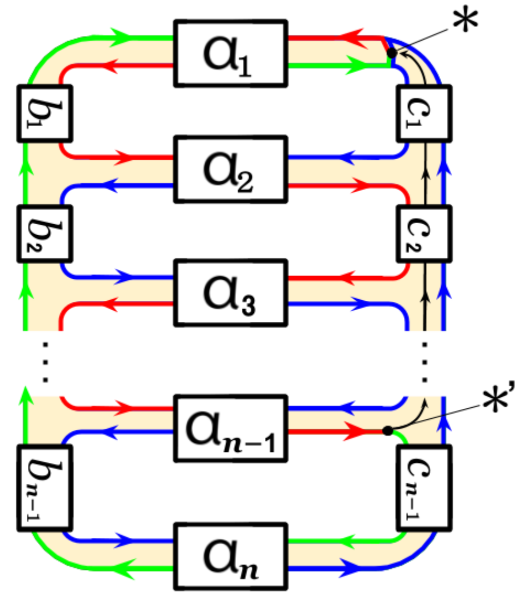

図 8: (1) の場合の緯線の向き付け.

上図のうち赤色の $*$ から $*'$ までの弧を r, 青色の $*'$ から $*$ までの弧を g, 青色のループを b と名付ける. また $*'$ から $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots c_1$ を通過して $*$ へ至る黒色の弧を δ と名付ける.
$\mathfrak{l}_K$ は 3 つの弧の連結として rgb と表せる. 一方でループ $r\delta$ は, 合成されたループ $e_1e_3\cdots e_{2g-1}$ に同相である. 同様に $\delta^{-1}g$ は $(e_1e_2\cdots e_{2g})^{-1}$ に, b は $e_2e_4\cdots e_{2g}$ に同相であるから,

$$\mathfrak{l}_K = rgb = (r\delta)(\delta^{-1}g)b = e_1e_3\cdots e_{2g-1}(e_1e_2\cdots e_{2g})^{-1}e_2e_4\cdots e_{2g}.$$

が成り立つため, (1) について定理は示された. (2) についても同様に K を辿るループを図示して考えれば良い.

例 5.2. 前節の結果を観察することにより, $9_{16}, 9_{19}, 9_{38}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}$ を除く 9 交点以下の非ファイバー結び目のうち, 定理 5.1 のいずれかの仮定を満たさないものは $8_{15}, 9_{12}, 9_{25}$ の 3 つのみであることがわかる. これら 3 つの結び目については個別に緯線を求めた：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{l}_{8_{15}} &= y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_3y_4^{-1}y_3^{-1}y_4,\\
\mathfrak{l}_{9_{12}} &= y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_3y_4^{-1}y_3^{-1}y_4,\\
\mathfrak{l}_{9_{25}} &= y_1y_4^{-1}y_3y_4y_3^{-1}y_2^{-1}y_1^{-1}y_2.
\end{aligned}$$

$9_{16}, 9_{19}, 9_{38}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}$ を除く 9 交点以下の非ファイバー結び目はすべて, 各 i について $\mathfrak{l}$ に現れる y_i の指数の合計が 0 となることに注意する.

以上の結果から, 9 交点以下の大部分の非ファイバー結び目を含むひねり付きプレッツェル結び目について, 緯線 $\mathfrak{l}_K$ を双対語で表せるようになった.

6 応用例：巡回被覆空間の Milnor ペアリング

本節では応用として巡回被覆空間の Milnor ペアリングを幾つか計算する。Milnor ペアリングは Blanchfield ペアリングないしザイフェルト行列を用い計算できる公式が知られている ([Lit, Theorem A.1] と [Erle, Satz 4.4] 参照) が、本論文ではカップ積を直接計算する別の新しい方法を提唱する。

本論では簡単の為, M を連結で向き付き滑らかな閉 3 次元多様体とし, 全射準同型 $\alpha : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ を固定する. また $\widetilde{M}$ でそれに付随する巡回被覆空間とする. $t : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ を被覆変換とする.

6.1 Milnor ペアリングの準備

この時, ミルナーは次の双対定理を示した.

定理 6.1 ([Mil1, §4])**.** $\mathbb{Q}$ を有理数体とする. $\widetilde{M}$ の有理ホモロジー $H_*(\widetilde{M};\mathbb{Q})$ が有限次元とする. この時, $H^2(\widetilde{M};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ であり, 次のカップ積は非退化である：

$$\smile : H^1(\widetilde{M};\mathbb{F}) \times H^1(\widetilde{M};\mathbb{Q}) \longrightarrow H^2(\widetilde{M};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}.$$

さらに等長性 $t^*x \smile t^*y = x \smile y$ を満たす.

この非退化形式は **Milnor ペアリング**や**ミルナー双対**ともいう. この定理の主張は端的で美しいが, その様な交代型式の計算例は今まで皆無であった. もしその交代型式が行列表示できれば, 定量的な情報が得られる. 実際, Milnor[Mil2] は等長的な非退化交代型式の同型類を全て分類し, 或る不変量で特徴づけている.

そこで, 本論では結び目を 0 手術して得られる 3 次元多様体に対して, 計算のアルゴリズムを与え, 例を挙げる. 以下, 結び目 $K \subset S^3$ に対して、M_K を K を 0 手術して得られる 3 次元多様体とする. $H_*(M_K;\mathbb{Z}) \cong H_*(S^2 \times S^1;\mathbb{Z})$ に注意し, 全射 $\pi_1(M_K) \to \mathbb{Z}$ を一つ固定する. 次の補題に注意しておこう：

補題 6.2. $\widetilde{M}_K \to S^3 \setminus K$ を無限巡回被覆とする. $H_2(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ の生成元は結び目 K の緯線 $\mathfrak{l}_K$ で代表される. また $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ は $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ に同型である. 特に, $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ は有限次元である.

証明. $H_2(\widetilde{M}_K;\mathbb{Z}) = 0$ はよく知られている ([Lic] 等参照). $\widetilde{M}_K$ は $\widetilde{M}_K \cup_{\mathbb{R}\times S^1} \mathbb{R} \times D^2$ と見做せ, ここで $\cup$ は緯線 $\mathfrak{l}_K$ にそった貼合わせと思える. $H_*(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ は有限次元がよく知られている [Mil1, Assertion 5] ため, Mayer-Vietoris 完全列より $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ もそうである. よって, ミルナーの定理 6.5 より $H_2(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ となる. Mayer-Vietoris 完全列より生成元は緯線 $\mathfrak{l}_K$ で代表される事が解り, $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ も解る.

注意 6.3. Milnor [Mil1] は次の相対版ペアリングも考察し、その非退化性を論じていた：

$$\smile : H^1(\widetilde{M}_K, \partial(\widetilde{M}_K);\mathbb{Q})^{\otimes 2} \longrightarrow H^2(\widetilde{M}_K, \partial(\widetilde{M}_K);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}. \tag{2}$$

また自然な同型射 $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong H^1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong H^1(\widetilde{M}_K, \partial(\widetilde{M}_K);\mathbb{Q})$ が存在する事に注意すれば、$M = M_K$ の Milnor ペアリングと、(2) は一致する事が、コホモロジー長完全列の考察から確かめられる。

次に基本群 $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の記述を与えよう. 補題 2.5 の表示から, $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の緯線 $\mathfrak{l}_K$ を用いて, $\pi_1(M_K)$ の表示は次で得られる.

$$\pi_1(M_K) \cong \langle x_1, x_2, ..., x_{2g}, h \mid \mathfrak{l}_K, \quad r_i := h y_i h^{-1} z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, ..., 2g) \rangle.$$

次に $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の表示を得る為に記号を用意する. $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $x_i^{(k)}$ を不定元 x_i のコピーとする. $y_i^{(k)}$ を語 y_i 内にある x_i を $x_i^{(k)}$ に置き換える事で得られる語とする. すると, Reidemeister-Schreier 手法によって, $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の表示は次で得られる.

$$\pi_1(\widetilde{M}_K) \cong \langle x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{2g}^{(k)} \quad (k \in \mathbb{Z}) \mid \mathfrak{l}_K^{(k)}, \quad r_i^{(k)} := y_i^{(k)} (z_i^{(k+1)})^{-1} \quad (i = 1, 2, ..., 2g, k \in \mathbb{Z}) \rangle.$$

ここで注意する事に, 任意の $\mathfrak{l}_K^{(k)}$ は $\mathfrak{l}_K^{(0)}$ に等しい事が, 関係 $r_i^{(k)}$ から解る. よって $\mathfrak{l}_K^{(k)}$ 達は $\mathfrak{l}^{(0)}$ のみとして良い. 以下, $\mathfrak{l}_K^{(0)}$ は $\mathfrak{l}_K$ と単に書く.

次に, $\widetilde{M}_K$ の (2 次以下の) 胞体複体を与える. ここで注意する事に, Gabai 等の結果によって M_K が Eilenberg-MacLane 空間である事に気づこう. 特に, その巡回被覆 $\widetilde{M}_K$ もそうである. 従って, $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の群複体は、$\widetilde{M}_K$ のセル複体とみなすことが出来る. であるので, $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の (自明係数) 群複体 $C_*(\pi_1(\widetilde{M}_K);\mathbb{Q})$ から考察してもよい. そこで $i \leq 2g$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathbb{Q}\,a_i^{(k)}$ と $\mathbb{Q}\,b_i^{(k)}$ をそれぞれ不定元 $a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$ を基底とする $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とする. すると二次までの複体は次で書ける：

$$\mathbb{Q}\,\mathfrak{l}_K \oplus \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g}\mathbb{Q}\,b_i^{(k)} \xrightarrow{\partial_2^{\mathfrak{l}_K}\oplus\partial_2} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g}\mathbb{Q}\,a_i^{(k)} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Q} \to 0.$$

ここで ∂_1 は零写像で, ∂_2 は $r_i^{(k)}$ のヤコビ行列で書ける事が知られている (例えば [Lin, Tro] を参照). 厳密に書けば, 次で定まる線形写像で与えられる.

$$\partial_2 : \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g}\mathbb{Q}\,b_i^{(k)} \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g}\mathbb{Q}\,a_i^{(k)}; \quad b_i^{(k)} \longmapsto \sum_{j=1}^{2g}\varepsilon\Big(\frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial x_j^{(k)}}\Big)a_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{2g}\varepsilon\Big(\frac{\partial z_i^{(k+1)}}{\partial x_j^{(k+1)}}\Big)a_j^{(k+1)}.$$

また $\partial_2^{\mathfrak{l}_K} : \mathbb{Q}\,\mathfrak{l}_K \to \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g}\mathbb{Q}\,a_i^{(k)}$ を零写像とする. ∂_2 の $\mathrm{Hom}(\bullet,\mathbb{Q})$ をとったものを ∂_2^* と書くと, 次を得る：

$$H^1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Ker}(\partial_2^*). \tag{3}$$

また補題 6.2 から $H^2(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ の生成元は緯線 $\mathbb{Q}\,\mathfrak{l}_K$ で代表される事にも注意しよう.

次に、カップ積を [Tro, §2.4] から復習する. 以下, $C_1 = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g}\mathbb{Q}\,a_i^{(k)}$ を X_1 と書く. 準備として, 次の関数を考えよう：

$$\kappa : F \times F \longrightarrow X_1 \otimes X_1; \quad (u,v) \longmapsto \alpha(u)\otimes u\alpha(v),$$

ここで $\alpha(w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{2g}\varepsilon(\partial w/\partial x_i^{(k)})a_i^{(k)}$ とする. すると, 簡単に確かめられる事に κ は (正規化された) F の 2-コサイクルである. だが $H^2(F;X_1\otimes X_1)=0$ の事もあり, 一意的に $\Upsilon : F \to X_1\otimes X_1$ で次を満たすように取れる[2]：

$$\Upsilon(uv) = \Upsilon(u) + \Upsilon(v) + \kappa(u,v), \quad \Upsilon(1) = 0 \quad \Upsilon(x_i^{(k)}) = 0, \qquad {}^{\forall}u,v \in F, i \in I.$$

すると次が知られている：

命題 6.4 ([Tro, §2.4]). *任意の 1-コサイクル $f : X_1 \to \mathbb{Q}$ と $f' : X_1 \to \mathbb{Q}$ に対し, カップ積 $f \smile f'$ と 2 サイクル $\mathfrak{l}_K$ のペアリングは $(f\otimes f')(\Upsilon(\mathfrak{l}_K))$ に等しい. つまり*

$$\langle f \star f', \mathfrak{l}_K\rangle = (f\otimes f')(\Upsilon(\mathfrak{l}_K)) \in \mathbb{Q}.$$

(3) によれば, 1-コサイクルの集合はコホモロジー $H^1(\pi_1(\widetilde{M}_K);\mathbb{Q}) = H^1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ と同一視される. 以上をまとめると次の定理を得る：

定理 6.5. *結び目 $K \subset S^3$ に対して、M_K を K を 0 手術して得られる 3 次元多様体とする.*

この時, $H^1(X_1;\mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}(\partial_2^*)$ はコホモロジー $H^1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ に同型であり, 双線形写像

$$H^1(X_1;\mathbb{Q}) \times H^1(X_1;\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}; \quad (f,f') \mapsto (f\otimes f')(\Upsilon(\mathfrak{l}_K))$$

は Milnor ペアリングと一致する.

以上より, $\mathrm{Ker}(\partial_2^*)$ と $\Upsilon(\mathfrak{l}_K)$ が計算出来れば、Milnor ペアリングは計算できることになった.

最後に、結び目の符号数との関連を述べる. 結び目 K の緯線を $\mathfrak{l}_K$ に対し, $\omega(K) := (f\otimes f')(\Upsilon(\mathfrak{l}_K)) \in X_1\otimes X_1$ とおく. u_i $(i = 1,2,\ldots,2g)$ を $t^*(u_i) = u_{i+1}$ $(i \leq 2g-1)$ を満たすような F の元として, $\omega(K)$ の $\alpha(u_i)\otimes\alpha(u_j)$ の係数を (i,j) 成分とする $\mathbb{Q}$ 上の $2g\times 2g$ 行列を, 以下 $\Omega(K)$ と表す. Milnor[Mil1] は次の定理を示唆した (証明は [Ke2] を参照)

[2] この一意性は代数的にすぐ解る. なお Υ は u の語の長さの帰納法で構成される ; [Tro, Lemma 2.4] を参照.

定理 6.6 ([Mil1, Ke2])**.** 被覆変換が誘導する同型射 $t^* : H^1(M_K;\mathbb{Q}) \to H^1(M_K;\mathbb{Q})$ の $(2g \times 2g)$-行列表示を T と置く。

この時、$\Omega T^\tau - T\Omega$ の符号数 S が元の結び目の符号数に一致する.

6.2　双対語からの Milnor ペアリングの計算

前節の最後に述べた記法を用いて、Lin 表示から Milnor ペアリングの計算法を与えるアルゴリズムを示す：

定理 6.7. 結び目群 $\pi_1(S^3\backslash K)$ の *Lin* の表示が $\langle x_1, x_2, ..., x_{2g}, h \mid r_i := hy_ih^{-1}z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, ..., 2g)\rangle$ で与えられ, K の *Alexander* 多項式の次数が $2g$ に一致すると仮定する.
結び目 K の緯線が $\mathfrak{l}_K = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ (すべての j について$\epsilon_j = \pm 1, 1 \le i_j \le 2g$) で表され, 各 i について $\mathfrak{l}_K$ に現れる x_i の指数の合計が 0 となるとき, *Milnor* ペアリングは $\Omega(K)$ で与えられ, $\Omega(K)$ は以下の式で計算される：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\epsilon_k}{2} E_{i_k,i_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k \left(\sum_{m=1}^{2g} \left(\sum_{\substack{1 \le l \le k \\ \wedge i_l = m}} \epsilon_l E_{i_k,m} \right) \right).$$

ただし $E_{i,j}$ は (i,j) 成分のみ 1, その他の成分はすべて 0 となるような $2g \times 2g$ 行列とする.

例 6.8. 奇数型プレッツェル結び目 $P(a,b,c) = P(2p+1, 2q+1, 2r+1)$ は, 定理 5.1 の仮定 (1) を満たすため, その緯線は $\mathfrak{l} = y_1 y_2^{-1} y_1^{-1} y_2$ によって与えられる. 例 3.6 を用いれば, この $\mathfrak{l}_{P(a,b,c)}$ は次のように表記される：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sub}(\mathfrak{l}_{P(a,b,c)}) &= (\underbrace{1,\dots,1}_{|p|\text{ 個}}, \underbrace{\sigma_-(b), \sigma_+(b), ,\dots, \sigma_-(b)}_{|b|\text{ 個}}, \underbrace{2,\dots,2}_{|r+1|\text{ 個}}, \underbrace{1,\dots,1}_{|p|\text{ 個}}, \underbrace{\sigma_-(b), \sigma_+(b), ,\dots, \sigma_-(b)}_{|b|\text{ 個}}, \underbrace{2,\dots,2}_{|r+1|\text{ 個}}),\\
\mathrm{Ind}(\mathfrak{l}_{P(a,b,c)}) &= (\underbrace{-\sigma(a),\dots,-\sigma(a)}_{|p|\text{ 個}}, \underbrace{-1,1,\dots,-1}_{|b|\text{ 個}}, \underbrace{\sigma(c),\dots,\sigma(c)}_{|r+1|\text{ 個}}, \underbrace{\sigma(a),\dots,\sigma(a)}_{|p|\text{ 個}}, \underbrace{1,-1,\dots,1}_{|b|\text{ 個}}, \underbrace{-\sigma(c),\dots,-\sigma(c)}_{|r+1|\text{ 個}}).
\end{aligned}$$

これに対し定理 6.7 を適用すると, $K = P(2p+1, 2q+1, 2r+1)$ とした場合の $\Omega(K)$ は

$$\begin{pmatrix} 0 & -((p+1)(q+1)(r+1) - pqr) \\ (p+1)(q+1)(r+1) - pqr & 0 \end{pmatrix}.$$

と計算される. 一方で $P(2p+1, 2q+1, 2r+1)$ の Alexander 多項式は次の行列 A を用いて, t についての二次式 $t^{-2}\det(tA - A^T)$ で計算される ([Lic] を参照)：

$$A = \begin{pmatrix} p+q+1 & -q-1 & 0 & 0 \\ -q & q+r+1 & -r-1 & 0 \\ 0 & -r & r+s+1 & -s-1 \\ 0 & 0 & -s & s+t+1 \end{pmatrix}.$$

このとき $t^{-2}\det(tA - A^T)$ の二次の項の係数は $-\det(\Omega(K))$ に一致することが確かめられる. 即ち $-\det(\Omega(K)) \neq 0$ の場合に限り, $K = P(2p+1, 2q+1, 2r+1)$ の Milnor ペアリングは $\Omega(K)$ に一致する.

定理 6.7 **の証明**.　定義より

$$\alpha(x_i^{-1}) = \frac{\partial x_i^{-1}}{\partial x_i} \alpha(x_i) + \sum_{j \neq i} 0\alpha(x_j) = -x_i^{-1}\alpha(x_i),$$

$$\Upsilon(x_i^{-1}) = \Upsilon(1) - \Upsilon(x_i) - \alpha(x_i) \otimes \alpha(x_i^{-1}) = \alpha(x_i) \otimes x_i^{-1}\alpha(x_i).$$

が成り立つ. また各 i について $\mathfrak{l}_K$ に現れる x_i の指数の合計は 0 になると仮定したため,

$$\sum_{l=1}^{n} \epsilon_l \alpha(x_{i_l}) = 0.$$

が成り立つ. 以上より,

$$\begin{aligned}
\omega(\mathfrak{l}_K) &= \omega(x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}) \\
&= \omega(x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}) + \omega(x_{i_1}^{\epsilon_1}) + \alpha(x_{i_1}^{\epsilon_1}) \otimes 1\alpha(x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}) \\
&= \cdots = \omega(x_{i_n}^{\epsilon_n}) + \sum_{k=1}^{n-1} \omega(x_{i_k}^{\epsilon_k}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha(x_{i_k}^{\epsilon_k}) \otimes 1\alpha(x_{i_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega(x_{i_k}^{\epsilon_k}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha(x_{i_k}^{\epsilon_k}) \otimes \left(\alpha(x_{i_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}}) + 1 \cdot \alpha(x_{i_{k+2}}^{\epsilon_{k+2}}) + \cdots + 1 \cdot \alpha(x_{i_n}^{\epsilon_n})\right)\right) \\
&= \sum_{1 \le k \le n \wedge \epsilon_k = -1} (\alpha(x_{i_k}) \otimes 1\alpha(x_{i_k})) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\epsilon_k \alpha(x_{i_k}) \otimes \left(\sum_{l=k+1}^{n} \epsilon_l \alpha(x_{i_l})\right)\right) \\
&= \sum_{1 \le k \le n} \left(\frac{1-\epsilon_k}{2} \alpha(x_{i_k}) \otimes 1\alpha(x_{i_k})\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\epsilon_k \alpha(x_{i_k}) \otimes \left(\sum_{l=1}^{n} \epsilon_l \alpha(x_{i_l})\right)\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\epsilon_k \alpha(x_{i_k}) \otimes \left(\sum_{l=1}^{k} \epsilon_l \alpha(x_{i_l})\right)\right) \\
&= \sum_{1 \le k \le n} \left(\frac{1-\epsilon_k}{2} \alpha(x_{i_k}) \otimes 1\alpha(x_{i_k})\right) + 0 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\epsilon_k \alpha(x_{i_k}) \otimes \left(\sum_{1 \le l \le k \wedge i_l = 1} \epsilon_l \alpha(x_1) + \cdots + \sum_{1 \le l \le k \wedge i_l = N} \epsilon_l \alpha(x_N)\right)\right).
\end{aligned}$$

と計算され, これを行列として表示すると, 命題で述べた $\Omega(K)$ の計算式が得られる.

例 6.9. 奇数型プレッツェル結び目 $K = P(a,b,c) = P(2p+1, 2q+1, 2r+1)$ について, 以下の変換を与える行列 T を考えたい. ただし $a_i^{(k)} := \alpha(x_i^{(k)})$ とした：

$$(a_1^{(k)}, a_2^{(k)})T = (a_1^{(k+1)}, a_2^{(k+1)}).$$

基本群 $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の表示を思い出そう. $i = 1, 2$ に対し $y_i^{(k)} = z_i^{(k+1)}$ が成り立つ. 語 $(x_1^{(k_1)})^{\epsilon_1} \cdots (x_m^{(k_m)})^{\epsilon_m}$ に対し $\beta((x_1^{(k_1)})^{\epsilon_1} \cdots (x_m^{(k_m)})^{\epsilon_m}) := \epsilon_1 \alpha(x_1^{(k_1)}) + \cdots + \epsilon_m \alpha(x_m^{(k_m)})$ と定義する. このとき連立方程式

$$\begin{cases} \beta(y_1^{(k)}) = \beta(z_1^{(k+1)}) \\ \beta(y_2^{(k)}) = \beta(z_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

を考えることが出来る. 定理 3.5 を用いて各 y_i, z_i を計算すると, 上式は

$$\begin{pmatrix} -(p+q+1) & q \\ q+1 & -(q+r+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ a_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(p+q+1) & q+1 \\ q & -(q+r+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(k+1)} \\ a_2^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

という形になる. 右辺の行列が可逆であることは, 例 6.8 の $-\mathrm{det}\Omega \neq 0$ と同値である. このとき

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} -(p+q+1) & q+1 \\ q & -(q+r+1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -(p+q+1) & q \\ q+1 & -(q+r+1) \end{pmatrix} \right\}^{\tau}$$

として T を求めることが出来る.

Milnor はこの T に関して, $\Omega T^{\tau} - T\Omega$ の符号数 S が元の結び目の符号数に一致することを示したのだった. これに例 6.8 の Ω と上記の T を代入すると, 下記の行列が得られる：

$$\begin{pmatrix} 2(p+q+1) & -b \\ -b & 2(p+q+1) \end{pmatrix}$$

奇数型プレッツェル結び目 $P(a,b,c)$ の符号数はこの行列の符号数に一致する. またこの行列の固有値は $b + \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{b^2 + (\frac{a-c}{2})^2}$ と求まる.

例 6.10. 次のような種数 1 の二橋結び目 $B(2m,2n)$ について考える．ただし $B(m,0), B(0,n)$ は unknot であるため除外する．すなわち $mn \neq 0$ と仮定する．

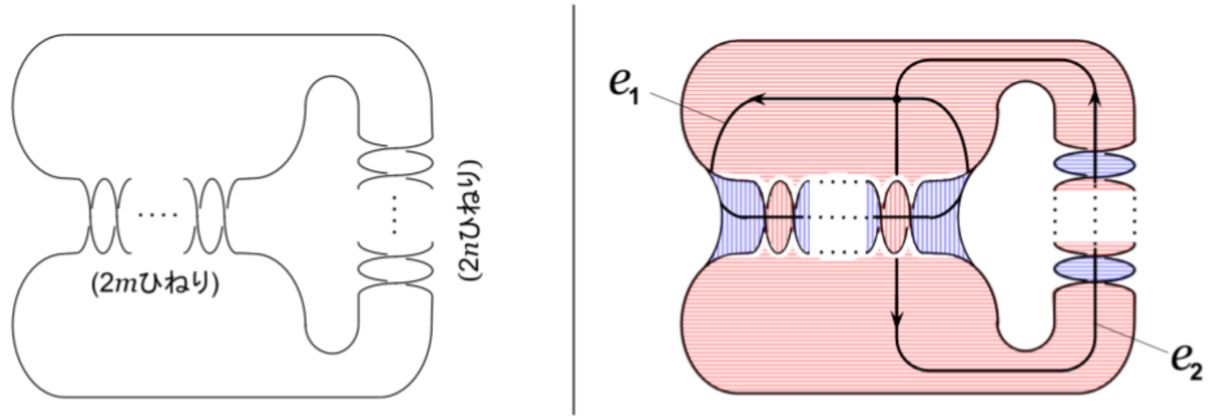

図 9: 偶数ひねりの二橋結び目の図式および Seifert 曲面.

上図 9 は平面的な図式でないことに注意する．上図右は $B(2m,2n)$ の Seifert 曲面を立体的に図示し，表と裏をそれぞれ赤色，青色で塗り分け，更にスパインをとったものである．

節 2.3 における定義より，$B(2m,2n)$ の双対語は $y_1 = x_1^{-m}, y_2 = x_1x_2^{-n}, z_1 = x_1^{-m}x_2, z_2 = x_2^{-n}$ で与えられ，緯線は $y_1(y_1y_2)^{-1}y_2$ すなわち $x_1^{-m}x_2^nx_1^mx_2^{-n}$ と計算される．定理 6.7 より

$$\Omega(B(m,n)) = |mn| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

であり，また例 6.9 と同様に連立方程式

$$\begin{cases} \omega(y_1^{(k)}) = \omega(z_1^{(k+1)}) \\ \omega(y_2^{(k)}) = \omega(z_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

に上記の双対語を代入してこれを解くと，$(a_1^{(k)}, a_2^{(k)})T = (a_1^{(k+1)}, a_2^{(k+1)})$ なる T は

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 0 & -n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 1 & -n \end{pmatrix} \right\}^{\tau} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{mn} & -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{m} & 1 \end{pmatrix}$$

として求めることができ，このとき $\Omega T^{\tau} - T\Omega$ を計算すると下記の行列が得られる：

$$|mn| \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & -\frac{1}{mn} \\ -\frac{1}{mn} & \frac{2}{m} \end{pmatrix}$$

この行列の固有値は $(m+n)\sigma(mn) \pm \sqrt{(m-n)^2+1}$ と求まる．

6.3　9 交点以下の非ファイバー結び目の Milnor ペアリングの計算

各ひねり付きプレッツェル結び目を表す整数から, 定理 3.5 を用いて双対語ひいては緯線を計算し, 定理 6.7 に代入するという手順で, $9_{16}, 9_{19}, 9_{38}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}$ を除く 9 交点以下の非ファイバー結び目の Ω をすべて計算できる. 加えて双対語から例 6.9 の連立方程式を立て, これを解くことで, T および S を計算することも出来る. 各量の *Mathematica* による計算結果を以下にまとめる. なお, 使用したコードは付録 B に添付した：

K	Ω	$\det\Omega$	T	S	$\Delta_K(t)$
5_2	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	-2	$2-3t+2t^2$
6_1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	0	$2-5t+2t^2$
7_2	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$	-2	$3-5t+3t^2$
7_3	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	-4	$2-3t+3t^2-3t^3+2t^4$
7_4	$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$	-2	$4-7t+4t^2$
7_5	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$	-4	$2-4t+5t^2-4t^3+2t^4$
8_1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	0	$3-7t+3t^2$
8_3	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$	0	$4-9t+4t^2$
8_4	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	2	$2-5t+5t^2-5t^3+2t^4$
8_6	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$	-2	$2-6t+7t^2-6t^3+2t^4$
8_8	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	0	$2-6t+9t^2-6t^3+2t^4$
8_{11}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	-2	$2-7t+9t^2-7t^3+2t^4$
8_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	0	$2-7t+11t^2-7t^3+2t^4$
8_{14}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	-2	$2-8t+11t^2-8t^3+2t^4$
8_{15}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	-4	$3-8t+11t^2-8t^3+3t^4$
9_2	$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$	-2	$4-7t+4t^2$
9_3	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	-6	$2-3t+3t^2-3t^3+3t^4-3t^5+2t^6$
9_4	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$	-4	$3-5t+5t^2-5t^3+3t^4$
9_5	$\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$	36	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$	-2	$6-11t+6t^2$
9_6	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	-6	$2-4t+5t^2-5t^3+5t^4-4t^5+2t^6$

K	Ω	$\det\Omega$	T	S	$\Delta_K(t)$
9_7	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$	-4	$3-7t+9t^2-7t^3+3t^4$
9_8	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	-2	$2-8t+11t^2-8t^3+2t^4$
9_9	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	-6	$2-4t+6t^2-7t^3+6t^4-4t^5+2t^6$
9_{10}	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	-4	$4-8t+9t^2-8t^3+4t^4$
9_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	-2	$2-9t+13t^2-9t^3+2t^4$
9_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$	-4	$4-9t+11t^2-9t^3+4*t^4$
9_{14}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	0	$2-9t+15t^2-9t^3+2t^4$
9_{15}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	2	$2-10t+15t^2-10t^3+2t^4$
9_{18}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	-4	$4-10t+13t^2-10t^3+4t^4$
9_{21}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	2	$2-11t+17t^2-11t^3+2t^4$
9_{23}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	-4	$4-11t+15t^2-11t^3+4t^4$
9_{25}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$	-2	$3-12t+17t^2-12t^3+3t^4$
9_{35}	$\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$	49	$\begin{pmatrix} \frac{8}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$	-2	$7-13t+7t^2$
9_{37}	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$	0	$2-11t+19t^2-11t^3+2t^4$
9_{46}	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	0	–	–	$2-5t+2t^2$

なお上表のうち 9_{46} のみ，定理 6.7 の条件を満たしていない．実際，本稿の結果では 9_{46} の Lin の表示は $\langle x_1, x_2, ..., x_{2g}, h \mid r_i := hy_ih^{-1}z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, 3, 4)\rangle$ という形で与えられるが，一方で Alexander 多項式は 2 次式である．そのため $\Omega(9_{46})$ は 9_{46} の Milnor ペアリングに一致しない．

また 10 交点以上の非ファイバー結び目の一部についても，例 6.8, 例 6.9 により $11a_{247} = P(-9,-1,-1), 11a_{343} = P(-7,-1,-3), 11a_{362} = P(-5,-3,-3), 11a_{363} = P(-5,-1,-5)$ などに対して，例 6.10 により $10_1 =$

$B(2,-8), 10_3 = B(4,-6), 12a_{803} = B(2,-10), 12a_{1166} = B(4,-8), 12a_{1287} = B(-6,6)$ などに対しても同様の計算結果を与えることができる.

なお、Milnor ペアリングは Blanchfield ペアリングないしザイフェルト行列を用い計算できる公式が知られている ([Lit, Theorem A.1] と [Erle, Satz 4.4] 参照)。以上の計算と既存の計算で幾つかの結び目で一致する事が確かめられた。

K	Ω	$\det\Omega$	T	S	$\Delta_K(t)$
10_1	$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	0	$4-9t+4t^2$
10_3	$\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$	36	$\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	0	$6-13t+6t^2$
$11a_{247}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$	-2	$5-9t+5t^2$
$11a_{343}$	$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$	64	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$	-2	$8-15t+8t^2$
$11a_{362}$	$\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$	100	$\begin{pmatrix} \frac{11}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$	-2	$10-19t+10t^2$
$11a_{363}$	$\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$	81	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$	-2	$9-17t+9t^2$
$12a_{803}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	0	$5-11t+5t^2$
$12a_{1166}$	$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$	64	$\begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	0	$8-17t+8t^2$
$12a_{1287}$	$\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$	81	$\begin{pmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$	0	$9-19t+9t^2$

付録 A　双対語の計算のソースコード

```
(*行列, ベクトルの略記*)
J := {{ 0, 1}, {1,0}}
H:={{1},{1}}

(*簡約ルール*)
ExpandOperation[a_] := ExpandAll[a]
ExpandOperation[NonCommutativeMultiply[x___, 0, y___]] := 0
ExpandOperation[NonCommutativeMultiply[x___, 1, y___]]
 := ExpandOperation[NonCommutativeMultiply[x,y]]
ExpandOperation[NonCommutativeMultiply[x___, 1^(-1), y___]]
 := ExpandOperation[NonCommutativeMultiply[x, y]]
ExpandOperation[h_Plus] := Map[ExpandOperation, h]
ExpandOperation[h_Times] := Map[ExpandOperation, h]
ExpandOperation[(h : NonCommutativeMultiply)[a___, b_Plus, c___]]
 := Distribute[h[a, b, c], Plus, h, Plus, ExpandOperation[h[##]] &]
```

```
SetAttributes[ExpandOperation, Listable]

(*群環上の行列の積の定義*)
TransitionMatrixMultiply[x_, y_]
 := ExpandOperation[Inner[NonCommutativeMultiply, x, y, Plus]]
TransitionMatrixMultiply[x_, y_, z__]
 :=TransitionMatrixMultiply[TransitionMatrixMultiply[x, y], z]
SetAttributes[TransitionMatrixMultiply, {Flat, OneIdentity}]

(*群環上の行列の累乗の定義*)
TransitionMatrixPower[m_, 0] := IdentityMatrix[2]
TransitionMatrixPower[m_,1]:= m
TransitionMatrixPower[m_,-1]:=Inverse[m]
TransitionMatrixPower[m_, n_Integer]
 := Apply[TransitionMatrixMultiply, Table[TransitionMatrixPower[m,Sign[n]], {i, Abs[n]}]]

(*ベクトルの特殊積の定義*)
TransitionVectorMultiply[x_, y_]
 := {{Part[x,1,1]**Part[y,1,1]},{Part[x,2,1]**Part[y,2,1]}}
TransitionVectorMultiply[x_, y_, z__]
 :=TransitionVectorMultiply[TransitionVectorMultiply[x, y], z]
SetAttributes[TransitionVectorMultiply, {Flat, OneIdentity}]

(*n にタングル数を代入*)
(*αに (a_1,...,a_n) を, βに b_1,...,b_(n-1)) を, γに (c_1,...,c_(n-1)) を代入*)
(*以下は 7_5 の場合の入力例*)
n=3
\[Alpha] = {{-1},{-1},{-1},{},{},{},{}}
\[Beta] = {{-1},{-1},{},{},{},{}}
\[Gamma] = {{-1},{-1},{},{},{},{}}

(*n タングルの場合の双対語 ((y[1],z[1]),...,(y[n-1],z[n-1])) 計算*)
x[0]=1
x[n]=1
Table[
  TransitionVectorMultiply[
    Apply[TransitionVectorMultiply,
      Table[
        TransitionMatrixMultiply[
          TransitionMatrixPower[J,Sum[Part[\[Gamma],l,1],{l,j-1}]],
          TransitionMatrixPower[{{0,x[j]},{1^(-1),0}},Part[\[Gamma],j,1]],
          H
        ],
      {j, i-1}]
    ],
    TransitionMatrixMultiply[
      TransitionMatrixPower[J,Sum[Part[\[Gamma],j,1],{j,i-1}]],
```

```
      TransitionMatrixPower[{{0,x[i-1]},{x[i]^(-1),0}},Part[\[Alpha],i,1]],
      H
    ],
    TransitionMatrixMultiply[
      TransitionMatrixPower[J,Sum[Part[\[Gamma],j,1],{j,i-1}]
                            +Part[\[Alpha],i,1]],
      TransitionMatrixPower[{{0,1},{x[i]^(-1),0}},Part[\[Beta],i,1]],
      H
    ],
    TransitionMatrixMultiply[
      TransitionMatrixPower[J,Sum[Part[\[Gamma],j,1],{j,i-1}]
                            +Part[\[Alpha],i,1]
                            +Part[\[Beta],i,1]],
      TransitionMatrixPower[{{0,x[i+1]},{x[i]^(-1),0}},Part[\[Alpha],i+1,1]],
      H
    ],
    Apply[TransitionVectorMultiply,
      Table[
        TransitionMatrixMultiply[
          TransitionMatrixPower[J,Sum[Part[\[Gamma],l,1],{l,i-1}]
                            +Part[\[Alpha],i,1]
                            +Part[\[Beta],i,1]+Part[\[Alpha],i+1,1]
                            +Sum[Part[\[Gamma],l,1],{l,i}]
                            -Sum[Part[\[Gamma],l,1],{l,i-k}]],
          TransitionMatrixPower[{{0,1},{x[i-k]^(-1),0}},Part[\[Gamma],i-k,1]],
          H
        ],
      {k,0,i-1}]
    ]
  ]
,{i,n-1}]
ClearAll[x]
```

付録 B　Milnor ペアリングの計算のソースコード

```
(*ひねり付きプレッツェルのパラメータを打ち込む*)
(*αに(a_1,...,a_n)を，βにb_1,...,b_(n-1))を，γに(c_1,...,c_(n-1))を代入*)
(*サンプルはの 9_25 の場合のパラメータ*)
\[Alpha]={-1,-1,-2,1,1}
\[Beta]={0,0,-1,0}
\[Gamma]={0,-1,-2,0}

(*双対語の添字ベクトル，指数ベクトルを構成*)
T=Length[\[Alpha]]
Part[\[Gamma],0]=0
```

```
DualBasis[i_] :=Join[
ArrayReshape[
Table[
Table[
Mod[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,j-1}],2]==0]*j*Boole[Mod[k,2]==(1+Sign[Part[\[Gamma],j]])/2]+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,j-1}],2]==1]*j*Boole[Mod[k,2]==(1-Sign[Part[\[Gamma],j]])/2]
,T]
,{k,Abs[Part[\[Gamma],j]]}]
,{j,0,i-1}]
,{Sum[Abs[Part[\[Gamma],l]],{l,0,i-1}]}],
Table[
Mod[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}],2]==0]*(i-Boole[Mod[k,2]==(1+Sign[Part[\[Alpha],i]])/2])+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}],2]==1]*(i-Boole[Mod[k,2]==(1-Sign[Part[\[Alpha],i]])/2])
,T]
,{k,Abs[Part[\[Alpha],i]]}],
Table[
Mod[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]\\
+Part[\[Alpha],i],2]==0]*i*Boole[Mod[k,2]==(1-Sign[Part[\[Beta],i]])/2]+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]\\
+Part[\[Alpha],i],2]==1]*i*Boole[Mod[k,2]==(1+Sign[Part[\[Beta],i]])/2]
,T]
,{k,Abs[Part[\[Beta],i]]}],
Table[
Mod[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]\\
+Part[\[Alpha],i]+Part[\[Beta],i],2]==0]*(i+Boole[Mod[k,2]==(1+Sign[Part[\[Alpha],i+1]])/2])+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]\\
+Part[\[Alpha],i]+Part[\[Beta],i],2]==1]*(i+Boole[Mod[k,2]==(1-Sign[Part[\[Alpha],i+1]])/2])
,T]
,{k,Abs[Part[\[Alpha],i+1]]}],
ArrayReshape[
Table[
Table[
Mod[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]+Part[\[Alpha],i]+Part[\[Beta],i]+Part[\[Alpha],i+1]\\
+Sum[Part[\[Gamma],m],{m,i,i-j+1,-1}],2]==0]*(i-j)*Boole[Mod[k,2]==(1-Sign[Part[\[Gamma],i-j]])/2]+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]+Part[\[Alpha],i]+Part[\[Beta],i]+Part[\[Alpha],i+1]+\\
Sum[Part[\[Gamma],m],{m,i,i-j+1,-1}],2]==1]*(i-j)*Boole[Mod[k,2]==(1+Sign[Part[\[Gamma],i-j]])/2]
,T]
,{k,Abs[Part[\[Gamma],i-j]]}]
,{j,0,i}]
,{Sum[Abs[Part[\[Gamma],l]],{l,i,1,-1}]}]
]
```

```
DualIndex[i_]:=Join[
ArrayReshape[
Table[
Table[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,j-1}],2]==0]*(-1)^(k+1)+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,j-1}],2]==1]*(-1)^k
,{k,Abs[Part[\[Gamma],j]]}]
,{j,0,i-1}]
,{Sum[Abs[Part[\[Gamma],l]],{l,0,i-1}]}],
Table[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}],2]==0]*(-1)^(k+1)+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}],2]==1]*(-1)^k
,{k,Abs[Part[\[Alpha],i]]}],
Table[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]+Part[\[Alpha],i],2]==0]*(-1)^(k+1)+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]+Part[\[Alpha],i],2]==1]*(-1)^k
,{k,Abs[Part[\[Beta],i]]}],
Table[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]+Part[\[Alpha],i]+Part[\[Beta],i],2]==0]*(-1)^(k+1)+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]+Part[\[Alpha],i]+Part[\[Beta],i],2]==1]*(-1)^k
,{k,Abs[Part[\[Alpha],i+1]]}],
ArrayReshape[
Table[
Table[
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]+Part[\[Alpha],i]+Part[\[Beta],i]+Part[\[Alpha],i+1]\\
+Sum[Part[\[Gamma],m],{m,i,i-j+1,-1}],2]==0]*(-1)^(k+1)+
Boole[Mod[Sum[Part[\[Gamma],m],{m,0,i-1}]+Part[\[Alpha],i]+Part[\[Beta],i]+Part[\[Alpha],i+1]\\
+Sum[Part[\[Gamma],m],{m,i,i-j+1,-1}],2]==1]*(-1)^k
,{k,Abs[Part[\[Gamma],i-j]]}]
,{j,0,i}]
,{Sum[Abs[Part[\[Gamma],l]],{l,i,1,-1}]}]
]

(*緯線の計算*)
A=ArrayReshape[Table[{DualBasis[i],DualBasis[i+1],Reverse[DualBasis[i]],\\
Reverse[DualBasis[i+1]]},{i,1,T-2,2}],2Sum[Length[DualBasis[i]],{i,1,T-1}]]
B=ArrayReshape[Table[{DualIndex[i],DualIndex[i+1],Reverse[-DualIndex[i]],\\
Reverse[-DualIndex[i+1]]},{i,1,T-2,2}],2Sum[Length[DualBasis[i]],{i,1,T-1}]]

(*Milnor ペアリングと行列式の計算*)
n=Length[A]
M=DiagonalMatrix[Table[Sum[(1-Part[B,k])/2\\
*Abs[Part[Table[Part[B,i]*Boole[Part[A,i]==h],{i,n}],k]],{k,n}],{h,T-1}]]\\
-Sum[(Part[B,m])*Table[Boole[Part[A,m]==g]\\
*Sum[Part[Table[Part[B,i]*Boole[Part[A,i]==h],{i,n}],l],{l,m}],{g,T-1},{h,T-1}],{m,n-1}]
MatrixForm[M]
TeXForm[M]
```

```
Det[M]

(*後処置*)
ClearAll[DualBasis]
ClearAll[DualIndex]
```

参考文献

[Bla] R. Blanchfield, *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann. of Math. **65**: (1957) 340–356.

[Erle] Erle, Dieter. *Die quadratische Form eines Knotens und ein Satz über Knotenmannigfaltigkeiten.* (German) J. Reine Angew. Math. 236 (1969), 174–218. MR0248856

[Fox] R. H. Fox, *Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring*, Ann. of Math. **57** (1953), no. 2, 547–560

[GS] H. Goda, T. Sakasai, *Factorization formulas and computations of higher-order Alexander invariants for homologically fibered knots,* Journal of Knot Theory and Its Ramifications 20 (2011), 1355–1380.

[KGM] 北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之 ねじれ *Alexander* 不変量, (2006), 6, 100–102.

[Ke1] C. Kearton, *Blanchfield duality and simple knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **202** (1975), 141–160.

[Ke2] C. Kearton, *Signatures of knots and the free differential calculus*, Quart J. Math.

[KI] *KnotInfo: Table of Knots* (最終閲覧：2020) https://knotinfo.math.indiana.edu/

[Lic] W.B. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1974

[Lin] X.S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), 361–380

[Lit] R. A. Litherland, *Cobordism of satellite knots. Four-manifold theory* (Durham, N.H., 1982), 327–362, Contemp. Math., 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984. MR0780587

[Mil1] J. W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., (1968) 115–133.

[Mil2] J. W. Milnor, *On isometries of inner product spaces*, Invent. Math. 8 (1969), 83–97.

[N1] T. Nosaka, *Twisted Alexander invariants of knot group representations*, to appear Tokyo Journal of Mathematics.

[N2] T. Nosaka, *Cellular chain complexes of universal covers of some 3-manifolds*, preprint

[Oha] 大橋 明行, プレッツェル結び目のファイバー性とねじれアレキサンダー不変量について, (2013), 35–37.

[Tro] H. F. Trotter, *Homology of group systems with applications to knot theory*, Ann. of Math. **76** (1962), 464–498