

「幾何学特論 E1」のあらまし (4/12)

作成：野坂 武史

本授業の目的

- ベクトル束に関する基本的な諸概念を学ぶ。

授業型式

- 毎週金曜日に 90 分授業を行う。

授業に必要な知識

- 線形代数, 位相空間や多様体の基本

単位取得のための最低条件 (期末試験はしない)

- 問題を 3, 4 問といてレポート提出.
- 解けそうにない人は, 授業ノート 3,4 回分のテフうち (ただし希望者は事前相談する事).

参考文献 (購入必須ではない)

- ミルナー・スタシェフ「特性類講義」丸善出版
- 服部明夫「多様体」岩波
- Allen Hatcher, Vector bundle and K-theory (氏の HP に無料である)
- 田村一郎「微分位相幾何学」岩波書店
- フーズミュラー「ファイバー束」

1 ベクトル束の基本

問題 1. 授業で紹介したホップ束がベクトル束であることを示せ.

問題 2. 体 $\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ か $\mathbb{H}$ とする. また $P^n\mathbb{F}$ を射影空間とする.

$$E_n := \{((x_0, \dots, x_n), [v_0 : \dots : v_n]) \in \mathbb{F}^{n+1} \times P^n\mathbb{F} \mid \sum_{i=0}^n x_i v_i = 0\}.$$

を考える. 射影 $E_n \rightarrow P^n\mathbb{F}$ がベクトル束になることを示せ (なおこれは $P^n\mathbb{F}$ の接束であろうか?).

他方で、次も考える：

$$T_n := \{(\vec{x}, \ell) \in \mathbb{F}^{n+1} \times P^n\mathbb{F} \mid \vec{x} \in \ell\}.$$

射影 $T_n \rightarrow P^n\mathbb{F}$ がベクトル束になる事を示せ. これを **tautological 束** という

問題 3. 多様体 M に対して、接ベクトル束 TM も多様体の構造を持つことを示せ.

$f : M \rightarrow N$ を多様体の間の C^2 -級埋め込みとする. この時、誘導射 $Tf : TM \rightarrow TN$ も埋め込みであることを示せ.

問題 4. C^1 -級多様体 M に対して、接ベクトル束 TM の定義を 2 通り与えた (ここで埋め込み $M \rightarrow \mathbb{R}^N$ を固定する).

両者の定義それぞれから、 TM は M 上のベクトル束になることを示せ.

問題 5. $p : E \rightarrow N$ を多様体の間の C^1 -級写像とする. また各点 $x \in E$ に対して誘導射 $Tp_x : T_x E \rightarrow T_{f(x)} N$ が全射とする (この条件を沈めこみ submerssion という). また $b \in N$ に対し、 $f^{-1}(b)$ は $\mathbb{R}^{\dim E - \dim N}$ に微分同相であるとする.

この時、 $p : E \rightarrow N$ はベクトル束であることを示せ (難しければ、 N はコンパクトとしてよい).

逆に微分多様体構造をもつ C^1 -級写像 $p : E \rightarrow N$ がベクトル束の時、 p は沈めこみであることを示せ.

問題 6. 可微分多様体 M に対して、ジェット束という概念がある. その定義をのべ、それが M 上のベクトル束になることを示せ.

問題 7. 任意のベクトル束 $p : E \rightarrow X$ に対して、 p はホモトピー同値 $E \simeq B$ を与えることを示せ.

問題 8. n -次元位相多様体 M に対して、 n 次元ベクトル束 $E \rightarrow M$ を構成せよ. ただし M に C^1 -級構造をもつとき、 E は接ベクトル束 TM に同相であるように構成せよ (ヒント：マイクロ束).

2 束写像と、切断 (本節はハウスドルフ性を仮定する)

問題 9. S^2 上のベクトル場で、1 点のみ非零であるようなものを構成せよ。

問題 10. S^{2m+1} 上で、各点で非零なベクトル場を構成せよ。

もし S^n 上で、各点で非零なベクトル場があったとすると、写像 $S^n \rightarrow S^n; \vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ は恒等写像 id_{S^n} にホモトピックである事を示せ。

問題 11. S^5 上で、各点で線型独立なベクトル場を 2 つ構成せよ、

問題 12. Lie 群 G の接ベクトル束 TG は $G \times \mathbb{R}^{\dim G}$ に束同相であることを示せ (ヒント：左不変ベクトル場やリー環の概念を使え)

問題 13. S^7 の接ベクトル束は自明束 $S^7 \times \mathbb{R}^7$ に束同相であることを示せ (S^7 には Lie 群構造が入らない事が知られている)

問題 14. E, F を空間 X 上のベクトル束とし、 $f: E \rightarrow F$ をベクトル準同型とする。任意の $x \in X$ に対し、制限射 $f_x: E_x \rightarrow F_x$ が全射線形写像であると仮定する。 $\text{Ker}(f) = \{u \in E \mid u \in E_x, f_x(x) = 0, x \in X\}$ は E のベクトル束であることを示せ。また仮定を外した場合、 $\text{Ker}(f)$ がベクトル束にならない例を挙げよ。

E, F を空間 X 上のベクトル束とし、 $f: E \rightarrow F$ をベクトル準同型とする。その時、線形写像 $f|_{E_x}: E_x \rightarrow F_x$ の階数が最大となる点 x 全体の集合 U は開集合となることを示せ。

問題 15. (Faldbau の定理) I を $[0,1]$ とする。 n -次元立方体 I^n のベクトル束は自明である事を示せ (ヒント：まず I^n を二分割し、二つの上で自明な場合に示す。その 2 分割を何回かする事で一般的設定に帰着できることを示す)

問題 16. コンパクト空間上の任意のベクトル束は、自明束の部分束になることを示せ。

問題 17. (Swan の定理 [特性類講義] に解あり) Swan の定理を示せ。 X をチコノフ空間とし、 $C^0(X)$ を連続 $\mathbb{R}$ 関数全体の成す可換環とする。

任意の有限生成射影 $C^0(X)$ -加群 P に対して、或るベクトル束 $E \rightarrow X$ があって、 $C^0(X)$ -加群同型 $P \cong \Gamma(E)$ となる事を示せ。 $\Gamma(E)$ は切断全体の成す加群とする。

「位相幾何学」の演習問題 (4/26) 作成：野坂 武史

問題 18. $E \rightarrow X, F \rightarrow X$ をベクトル束とし, $F \subset E$ が部分ベクトル束とする。この時、商束 E/F の定義を与え、それがベクトル束であることを示せ。さらに、 E に計量が入っているとき、同型 $F^\perp \cong E/F$ を示せ。

問題 19. $E \rightarrow B$ を計量いりベクトル束とし, $s_1, \dots, s_n : B \rightarrow E$ を切断で、各点 $b \in B$ に対し, $s_1, \dots, s_n$ で張る部分空間 $\langle s_1, \dots, s_n \rangle \subset E_b$ は n 次元とする。この時、 n -次元部分束 I があって、束同型 $E \cong I \oplus E/I$ となる事を示せ。

問題 20. E を位相空間 X 上のベクトル束とし、 n を固定する。 n -次対称テンソル束 $S^n E$ と、 n -次交代テンソル束 $\bigwedge^n E$ という概念を自然に定義し、それがベクトル束であることを示せ。

さらに、ベクトル束の同型 $E^{\otimes n} \cong S^n E \oplus \bigwedge^n E$ を示せ。

問題 21. 問題 2 のベクトル束 E_n と T_n を考える。その和 $E_n \oplus T_n$ は $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ にベクトル同型である事を示せ。

問題 22. $\xi = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n$ を n 個の直線束の Whitney 和とする。 $r \leq n$ に対して次の同型がある事を示せ：

$$\bigwedge^r (\eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n) \cong \sum_{i(1) < \dots < i(r)} \lambda_{i(1)} \otimes \dots \otimes \lambda_{i(r)}.$$

(ヒント：底空間 B が一点の時に先ず示す。ベクトル束の演算が連続関手である事を示す。答えはフーズモラーの本の 5.6 節にある。)

問題 23. $E \rightarrow X, F \rightarrow X, G \rightarrow X$ を計量いりベクトル束とし、束写像 $i : E \rightarrow F$ と $p : F \rightarrow G$ とが与えられたとし、任意の点 $b \in X$ で次が完全列をなすとする。

$$0 \longrightarrow E_x \xrightarrow{i_x} F_x \xrightarrow{p_x} G_x \longrightarrow 0.$$

この時、ベクトル束の同型 $F \cong E \oplus G$ を示せ。

問題 24. X をパラコンパクト空間とする。 X 上の 1 次元ベクトル束 E に対して、テンソル積 $E \otimes E$ が自明束であることを示せ (ヒント：変換則のチェック)。

また X 上の 1 次元ベクトル束の同型類の集合が、テンソル束によって、アーベル群構造が入ることを示せ。

問題 25. S^1 上の自明束を ϵ , ホップ束を η で書くとする。任意の S^1 上の n 次元ベクトル束は ϵ^n か $\epsilon^{n-1} \oplus \eta$ にベクトル束同型であることを示せ。また $\epsilon \oplus \epsilon \cong \eta \oplus \eta$ も示せ。

2.1 パラコンパクト性 (本節はハウスドルフ性を仮定する)

問題 26. ハウスドルフ空間 X がパラコンパクトである必要十分条件はすべての開被覆が局所有限な開細分を持つような位相空間である事を示せ。ここで現れた未定義語は各自調べる事 (後者の性質が標準。証明は Wikipedia を見よ)

問題 27. パラコンパクト空間は正規である事を示せ。

問題 28. (Stone の定理) 距離空間がパラコンパクトである事を示せ。

問題 29. CW 複体がパラコンパクトである事を示せ。

休講報告：5月24日は休講とする。

問題 30. E を位相空間 X 上の m 次元ベクトル束とする. m -次交代テンソル束 $\bigwedge^m E$ が自明束であるとき, E は向付可能という。

向き付き可能な実2次元ベクトル束は、複素1次元ベクトル束構造を持つことを示せ。また向き付き可能なベクトル束の引戻しも、向き付き可能であることを示せ。 n が奇数とすると、実射影空間 $P^n \mathbb{R}$ の接空間が向き付き可能であることを示せ。

問題 31. 空間間の連続写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ 、ベクトル束ふたつ $E, E' \rightarrow B$ が与えられたとする。次のベクトル束同型を示せ

$$(g \circ f)^*(E) \cong g^*(f^*(E)), \quad f^*(E \oplus E') \cong f^*(E) \oplus f^*(E'), \quad f^*(E \otimes E') \cong f^*(E) \otimes f^*(E')$$

問題 32. $M \rightarrow S^1$ を Mobious 束とする。 $f: S^1 \rightarrow S^1; z \mapsto z^n$ と考える。 n が偶数の時 $f^*(M)$ は自明で、 n が奇数の時 $f^*(M)$ は Mobious 束となる事を示せ。

問題 33. 多様体間の C^∞ -級写像 $g: M \rightarrow N$ が沈め込みとする。この時、 $TM^{(f)} := \{u \mid x \in X, u \in T_x(g^{-1}(g(x)))\}$ は接束 TM の部分ベクトル束である事と、次のベクトル束同型を示せ：

$$TM \cong TM^{(f)} \oplus g^*(TN).$$

問題 34. (分裂原理) パラコンパクト上の n 次元ベクトル束 $p: E \rightarrow B$ を固定する。この時、次を満たす空間 $P(E)$ と連続全射 $f: P(E) \rightarrow B$ を構成せよ： $\forall b \in B, f^{-1}(b)$ は旗多様体と同相で、任意の m 次元ベクトル束 E' に対して、 $P(E)$ 上の m 個の 1 次元ベクトル束 $\eta_1, \dots, \eta_m$ があって、 $f^*(E') \cong \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_m$ となる。

問題 35. 多様体間の C^∞ -級埋め込み $g: M \rightarrow N$ が与えられたとする。 $U \supset g(M)$ を開管状近傍とする。 $TM \subset TN$ の直交束の全空間は U と自然に同相である事を示せ。

2.2 授業で証明を端折った補題 (解答は、「ファイバー束」の3章4節か、特性類講義にあり)

問題 36 (Faldbau の補題). A を位相空間とする。 $B_1 = A \times [0, c]$ とし $B_2 = A \times [c, 1]$ とする。ここで $0 < c < 1$ とする。底空間が $B = A \times [0, 1]$ となるベクトル束 $p: E \rightarrow B$ を考える。もし E の制限 $E|_{B_1}$ と $E|_{B_2}$ が自明束であるとき、 E も自明束である事を示せ。

問題 37. ベクトル $E \rightarrow A \times [0, 1]$ を考える。この時、 A の開被覆 $\{U_i \mid i \in I\}$ が存在して、 E の制限 $E|_{U_i \times [0, 1]}$ は自明ベクトル束となる事を示せ。

問題 38. 局所コンパクト空間の列 $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ と $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ とが帰納的極限として A, B を持つとする。 $A \times B$ 上の直積空間としての位相は、列 $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2 \subset \dots$ に付随した帰納的極限としての位相と一致する事を示せ。

問題 39. コンパクトハウスドルフト空間の列 $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ に対し、帰納的極限 A はパラコンパクトである事を示せ。

「位相幾何学」の演習問題 (5/17) 作成：野坂 武史

問題 40. $\mathbb{R}$ 上のグラスマン多様体 $G_{n,k}$ とし、 $\ell \in G_{n,k}$ に対して射影 $\pi_\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \ell$ を取る。 $U_\ell := \{\ell' \in G_{n,k} \mid \pi_\ell(\ell') \text{ が次元 } n \text{ である} \}$ とする。この時、開被覆 $\{U_\ell \mid \ell \in G_{n,k}\}$ が $G_{n,k}$ に C^ω -級多様体構造を与える事を示せ。

問題 41. $\mathbb{R}$ 上のグラスマン多様体 $G_{n,k}$ は、

$$\{A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \mid A^2 = A, {}^tA = A, \text{rank} A = k\} \subset \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$$

に同相である事を示せ。その事より、多様体 $G_{n,k}$ は、 $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ の部分多様体である事示せ。

問題 42 (解答は, Hatcher かフーズモラーにあり). χ をパラコンパクト空間 B 上のベクトル束で、開被覆 $B = \cup_{i \in I} U_i$ が $\chi|_{U_i}$ 上で自明とする。この時、可算個の局所有限な開被覆 $\{W_j \mid j \geq 1\}$ で $\chi|_{W_j}$ は自明になる満たすものが存在する事を示せ: さらに $\exists n \in \mathbb{N}$ で $\forall b \in B$ が $\#\{i \in I \mid b \in U_i\} \geq n$ となると、 $\#\{W_j\} \geq n$ となるように選べることを示せ。

問題 43. $p : E(\eta) \rightarrow B$ をベクトル束 η とし、 $g : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ を Gauss 写像とする。 $\beta : E(\eta \oplus \eta) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\beta(x, y) = \langle g(x) | g(y) \rangle$ と定めると、 η の内積を与える事示せ。

逆に、 η の任意の内積は、この様な構成で与えられることを示せ。

問題 44. $\mathbb{R}$ 上のグラスマン多様体の間の同相 $G_{n,k} \cong G_{n,n-k}$ を自然に作れ。

問題 45. $\mathbb{R}$ 上のグラスマン多様体が連結かつハウスドルフ空間である事を示せ。

問題 46. 普遍ベクトル束 $E_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow G_{n,k}$ がグラスマン多様体上のベクトル束であること示せ。つまり授業で述べた、局所自明性を与える写像が同相である事を示せ。

問題 47 (向き付き Grassman 多様体). $\tilde{G}_{n,k}$ を向き付き k 次元部分ベクトル束 $\ell \subset \mathbb{R}^n$ 全体の集合とする。 $V_n(\mathbb{R}^k)$ の商集合と思う事で、位相を入れる。この時、自然な射影 $\tilde{G}_{n,k} \rightarrow G_{n,k}$ は 2:1 の被覆になる事を示せ。

問題 48 (Plücker 埋込み). $V_k(\mathbb{R}^n)$ から外積 $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ への写像を $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ は、 $G_{n,k}$ から射影空間 $\mathbb{R}P^{kC_n-1}$ への可微分埋め込みを定義する事を示せ。

問題 49. $\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ か $\mathbb{H}$ とする。普遍バンドル $\eta \rightarrow \mathbb{F}P^\infty$ とする。外積テンソル $\eta \times \eta$ の対角部分は $\mathbb{F}P^\infty \times \mathbb{F}P^\infty$ の 1 次元ベクトル束のため、分類写像 $\mathbb{F}P^\infty \times \mathbb{F}P^\infty \rightarrow \mathbb{F}P^\infty$ が取れる。この分類写像により $\mathbb{F}P^\infty$ 上に位相群構造が入る事を示せ。 $\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ の時、その群構造は可換である事も示せ。

問題 50. 位数 q の有限体 $\mathbb{F}_q$ を固定する。 $k > n$ を固定する。ベクトル空間 $(\mathbb{F}_q)^k$ 内の n 次元部分ベクトル空間の集合の個数を答えよ。答えは $\frac{(q^k-1)(q^k-q)\dots(q^k-q^{n-1})}{(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})}$ であるが $\dots$ 。

問題 51. γ を $\mathbb{F}P^n$ の標準直線束とし、 $T\mathbb{F}P^n$ を接束、 ϵ を自明束とする。この時、束同型 $T\mathbb{F}P^n \oplus \epsilon \cong \gamma \oplus \dots \oplus \gamma$ となる事を示せ。

次回の授業のためのアンケート (5 月 31 日 文責：野坂武史)

以下のアンケートの目的は、今後の授業に参考にする為だけです。成績には一切関係なく、氏名は記入する必要はありません。また提出は任意です。

問 1. 以下の単語で、知っているものは、丸を付けてください。

単体ホモロジー	胞体ホモロジー	特異ホモロジー
コホモロジー	特異コホモロジー	カップ積
キャップ積	基本類	ポアンカレ双対定理

問 2. ホモロジーやコホモロジーに関しては、復習してほしいですか？復習してほしいのであれば、特に何をしてほしいかコメント下さい。

問 3. 他に要望や意見や質問などがあれば、コメントを下さい。但し、すべての要望に応えられるとは限りませんが…。

「幾何学特論 F1」第 2 Q (6/14)

作成：野坂 武史

本授業の目的

- 特性類に関する基本的な諸概念を学ぶ。

授業型式

- 毎週金曜日に 90 分授業を行う。

授業に必要な知識

- 線形代数, 位相空間や多様体の基本、ベクトル束、ホモロジー論

単位取得のための最低条件 (期末試験はしない)

- 出席点+問題 1 問を解く。
- 無出席ならば問題を 3, 4 問といてレポート提出。

参考文献 (購入必須ではない)

- ミルナー・スタシェフ「特性類講義」丸善出版
- Allen Hatcher, Vector bundle and K-theory (氏の HP に無料である)
- 田村一郎「微分位相幾何学」岩波書店
- フーズミュラー「ファイバー束」
- 中岡稔「ホモロジー論」
- ボット・トゥー「微分形式と代数トポロジー」

問題 52. カップ積 $C^i(X; R) \times C^j(X; R) \rightarrow C^{i+j}(X; R)$ がコホモロジー群上に誘導される事を定義から示せ。またカップ積が $H^*(X; R) = \bigoplus_n H^n(X; R)$ に次数付き環構造を与える事を示せ。

問題 53. $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ を 3 次元トーラスとし、 S^1 上に CW 複体構造を自然に定める (ここで 0-セルと 1-セルはひとつづつとする)。

1. T^3 上に、CW 複体の構造を与えよ。但し、それぞれのセルがどれほどあり、接着写像がどうなっているかちゃんと記述せよ。
2. そのセル構造から、コホモロジー群 $H^k(T^3; \mathbb{Z})$ を求め、生成元を述べよ。
3. その生成元を基に、 $H^*(T^3; \mathbb{Z})$ のカップ積構造を記述せよ。

問題 54. 次の二つの多様体 X, Y に対し、 X と Y がホモトピックでない事を示せ。

1. $X = S^2 \times S^4, \quad Y = \mathbb{C}P^3$
2. $X = S^2 \times S^2, \quad Y = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$

問題 55. Σ_g を種数 g の閉曲面とする。この時、カップ積 $H^1(\Sigma; \mathbb{Z}) \times H^1(\Sigma; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ が標準シンプレクティック型式と一致する事を示せ。

問題 56. トーラス $S^1 \times S^1$ の部分多様体 $A = S^1 \times \{x\}$ と $B = \{y\} \times S^1$ を考える。 A と B をどのようにホモトピックに動かしても、 $A \cap B$ は空集合でない事を示せ。

問題 57. M を向き付け可能 n 次元多様体とし、 $N \subset M$ を $n-1$ 次元連結な部分多様体で、 $M \setminus N$ が非連結とする。この時、 N も向き付け可能な事を示せ。

さらに $N \subset S^n$ を連結な閉 $n-1$ 次元部分多様体とする。この時、 N も向き付け可能な事を示せ。

以下の問題の解答は、特性類講義の付録 A に載っている：

問題 58. 普遍係数定理の特殊版たる次を示せ： $H_{n-1}(X; R)$ が零であるか、自由 R 加群であるとする。この時、コホモロジー $H^n(X; R)$ は、 $\text{Hom}_R(H_n(X; R), R)$ に標準的に同型である。ここで X を空間対 (X, A) に変更しても正しい事を示せ。

問題 59. M を n 次元多様体とする。 $K \subset M$ をコンパクト部分集合とする。ホモロジー群 $H_i(M, M - K; \mathbb{Z})$ は $i > n$ に関して零である。ホモロジー類 $\alpha \in H_n(M, M - K; \mathbb{Z})$ が零である為の必要十分条件が、制限

$$\forall x \in K, \quad \rho_x(\alpha) \in H_n(M, M \setminus \{x\})$$

が零である事を言う。ここで ρ_x は入射 $(M, M \setminus K) \rightarrow (M, M \setminus \{x\})$ を指す。

問題 60 (アレクサンダー双対定理). コンパクト部分集合 $K \subset S^n$ とし、その或る近傍が変異レトラクトであるとする。この時、 $x \in K, y \in S^n \setminus K$ が与えられた時、次の同型を示せ：

$$H^{i-1}(K, \{x\}; \mathbb{Z}) \cong H_{n-i}(S^n \setminus K, \{y\}; \mathbb{Z}).$$

問題 61. 次の環同型を示せ：

$$H^*(\mathbb{R}P^{2k}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(2\alpha, \alpha^{k+1}), \quad \deg \alpha = 2$$

$$H^*(\mathbb{R}P^{2k+1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(2\alpha, \alpha^{k+1}, \beta^2, \alpha\beta), \quad \deg \alpha = 2, \beta = 2k + 1$$

問題 62. カップ積を考える事で次を答えよ：(1) 任意の連続写像 $S^{k+\ell} \times S^k \times S^\ell$ の誘導射 $H_{k+\ell}(S^{k+\ell}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{k+\ell}(S^k \times S^\ell; \mathbb{Z})$ は自明である。

(2) $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}; (z_1, \dots, z_{n+1}) \mapsto (z_1^d, \dots, z_{n+1}^d)$ の誘導射 $f_d: \mathbb{C}^n P \rightarrow \mathbb{C}^n P$ を考える。この時、 $f_d^*: H^{2n}(\mathbb{C}^n P; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(\mathbb{C}^n P; \mathbb{Z})$ は何倍写像かを答えよ。

問題 63. X を商空間 $\mathbb{C}P^\infty/\mathbb{C}P^{n-1}$ とする。 $H^*(X; \mathbb{Z})$ は Cohen-Macaulay 環になる事を示せ。

問題 64. M を境界なし向き付け可能閉 n 次元多様体とする。ポアンカレ双対定理を使って、次の 2 次形式が非退化である事を示せ（ヒント：整数環の性質）：

$$H^k(X; \mathbb{Z}) \times H^{n-k}(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

問題 65. X をレンズ空間という 3 次元多様体とする。レンズ空間の定義を述べ、そのコホモロジー環 $H^*(X; \mathbb{Z}/m)$ を決定せよ。

問題 66 (Künneth の公式の特殊版). X, Y を CW 複体で、各 $H^i(X; R)$ がねじれを持たない R 加群であって、 Y が各次元で有限個の胞体しか持たないようなものとする。このとき、クロス積によって同型 $\bigoplus_{i+j=n} H^i(X; R) \otimes H^j(Y; R) \longrightarrow H^n(X \times Y; R)$ が誘導される事を示せ。

問題 67 (Hopf 不変量). 連続写像 $f: S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$ に対し、 $C(f)$ をその写像錘とする、つまり $C(f) := S^{2n} \cup_f e^{4n}$ という $2n$ -球面を $4n$ -セルに f で接着したものである。まず次のコホモロジーを計算せよ：

- $H^{2n}(C(f); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H^{4n}(C(f); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \quad H^i(C(f); \mathbb{Z}) = 0 \text{ for } i \neq 0; 2n; 4n.$
 $H^{2n}(C(f); \mathbb{Z})$ と $H^{4n}(C(f); \mathbb{Z})$ との生成元 α, β を固定する。この時、自然数を $h(f)$ を次式で定義する ($h(f)$ を Hopf 不変量という)：

$$\alpha \smile \alpha = h(f)\beta$$

次を示せ。

- (i) $h(f \circ \phi) = \deg(\phi)h(f)$ が写像 $\phi: S^{4n-1} \rightarrow S^{4n-1}$ に対して定まる。
- (ii) $h(\psi \circ f) = \deg(\psi)^2 h(f)$ が写像 $\psi: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ に対して定まる。
- (iii) $h(f_1 + f_2) = h(f_1) + h(f_2)$ が $f_1, f_2: S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$ に対し、成立する。

問題 68. $n = 1, 2, 4, 8$ の時、 $h(f) = 1$ となるような $f: S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$ を作れ。 $h(f) = 3$ となるような n を指定し、 $f: S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$ も作れ。

「位相幾何学」の演習問題 (6/28) 作成：野坂 武史

問題 69. 次のカップ積とキャップ積の関係式を示せ：

$$v_1 \cap (v_2 \cap c) = (v_1 \smile v_2) \cap c, \quad v_1, v_2 \in H^*(X; R), c \in H_*(X; R).$$

連続写像 $f: X \rightarrow X'$ に対して、次の射影公式を示せ：

$$f_*(f^*v' \cap c) = v' \cap f_*c \quad v' \in H^*(X'; R), c \in H_*(X; R).$$

問題 70 (Thom 空間). E を Riemann 計量をもつ m 次元ベクトル束とし、次を定義する.

$$D(E) := \{ x \in E \mid \|x\| \geq 1 \}, \quad S(E) := \{ x \in E \mid \|x\| = 1 \}$$

$S(E)$ を一点とする商空間 $\xi^E = D(E)/S(E)$ を Thom 空間という.

- (i) B がコンパクトの時、Thom 空間は全空間 E の一点コンパクトと同相である事を示せ.
- (ii) 自明束 $\mathbb{R}^k \times B \rightarrow B$ に対する Thom 空間は何か？
- (iii) S^1 上のメービウス束の Thom 空間が $\mathbb{R}P^2$ と同相である事を示せ.

問題 71. Thom 同型を用い、同型 $H^i(B; R) \cong H^{i+m}(\xi^E; R)$ を構成せよ.

問題 72. Wedge 積を定義し、和公式の同相 $\xi^{E \oplus E'} \cong \xi^E \wedge \xi^{E'}$ を構成せよ.

問題 73. 向き付きベクトル束 $E \rightarrow B$ と $E' \rightarrow B$ に対し、オイラー類の和公式を示せ：

$$e(E) \smile e(E') = e(E \oplus E').$$

また連続写像 $f: B' \rightarrow B$ に対して、 $e(f^*E) = f^*(E)$ を示せ.

問題 74 (中岡, p.178). 向き付き n 次元ベクトル束 $E \rightarrow B$ とする.

- (i) Thom 類 $\mathcal{T}(E) \in H^n(E, E^0)$ とトム同型 $\phi^*: H^n(B) \cong H^{2n}(B)$ に対して、

$$\phi^*(e(E)) = \mathcal{T}(E) \smile \mathcal{T}(E).$$

- (ii) n が奇数ならば $2e(E) = 0$.

問題 75 (Mathai-Quillen 公式). $E \rightarrow B$ を滑らかな n 次元ベクトル束で、 B がコンパクト可微分多様体であるとき、ドラームコホモロジー $H_{\text{comp}}^n(E)$ 内のトム類を代表する n -次微分形式を具体的に記述せよ.

「位相幾何学」の演習問題 (7/5) 作成：野坂 武史

問題 76. (i) 任意の複素ベクトル束が ($R = \mathbb{Z}$ で) 向付け可能である事を示せ。

(ii) 可微分多様体 B が向付け可能である必要十分条件が、接束 TM が ($R = \mathbb{Z}$ で) 向付け可能である事を示せ。

問題 77. Thom-Gysin 完全列を用いて、実射影空間と、複素射影空間のコホモロジー環を計算せよ。

問題 78. 無限次元の実座標空間の中の実次元が n の実ベクトル空間全体からなるグラスマン多様体 $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ を考えよう。その普遍束 $E \rightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ を考える。 $E \oplus E$ は向き付け可能なベクトル束であり、オイラー類 $\chi(E \oplus E)$ が非零である事を示せ。

問題 79 (Bott-Tu, §12). $p: E \rightarrow M$ を向き付き可微分多様体 M 上の向き付きベクトル束とすると、Euler 類 $\chi(E)$ は横断的切断と零切断の共通部分に Poincaré 双対である事を示せ。

問題 80. τ を S^n の接束とし、 $A \subset S^n \times S^n$ を、互いに対蹠点をなす単位ベクトルの組全体から成る反対角集合とする。立体射影を用いる事で、全空間 E が $S^n \times S^n \setminus A$ となる事を示せ。そして切除公理とホモトピーを用いる事で、

$$H^*(E, E_0) \cong H^*(S^n \times S^n, S^n \times S^n \setminus \Delta) \cong H^*(S^n \times S^n, A)$$

となる事を示せ。また n が偶数であるとき、オイラー類 $\chi(\tau)$ が $H^n(S^n; \mathbb{Z})$ の生成元の 2 倍となる事を示せ。系として、 τ が自明でない部分ベクトル束を持ちえない事を示せ。

問題 81. M を m 次元向き付き可微分多様体とする。対角成分 $\Delta \subset M \times M$ の開管状近傍 N が、接束 TM の全空間に微分同相である事を、指数写像を用いて証明せよ。

問題 82. 授業で述べた関係式を証明せよ： $U_M \in H^m(M \times M; \mathbb{Z})$ を N による Thom 類の引き戻しとする。 $a \in H^k(M; \mathbb{Z})$ と $b \in H_k(M; \mathbb{Z})$ に対して次式が成立する事を示せ：

$$\langle a, b \rangle = (-1)^{m+k^2} \langle U_M, b \times (a \cap [M]) \rangle.$$

問題 83 (分裂原理). $p: E \rightarrow B$ を階数 n のベクトル束とし、 $F\ell_n(E)$ を付随する Flag bundle とする。自然な射影 $q: F\ell_n(E) \rightarrow B$ をとる。この時、 $F\ell_n(E)$ 上のある直線束 $L_1, \dots, L_n$ があって、 $q^*(E)$ とホイットニー和 $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ とが束同相である事を示せ。

さらに (旗多様体のコホモロジーの結果を知らべ) Leray-Hirsh の定理を用い、 $q^*: H^*(B) \rightarrow H^*(F\ell_n(E))$ が単射である事を示せ。

問題 84. コンパクト多様体 X の埋込み定理を次の順で (1 の分割を用いず) 示せ。

(1) $\mathbb{P}(TX)$ を「 X の全ての点における全ての接ベクトルの方向」全体の集合とする。ここにコンパクト多様体構造をいれよ (Hint: 接束). 但し $\forall x \in X$ に対し、射影 $p: \mathbb{P}(TX) \rightarrow X$ の逆像 $p^{-1}(x)$ が実射影空間とする (この $\mathbb{P}(TX)$ を、接束に付随する射影束という)。

(2) さらに、 $\ell \in \mathbb{P}(TX)$ に対して、 X 上の C^∞ -関数 f_ℓ が存在して、 f_ℓ の x における ℓ の微分が 0 でないようにできる事を示せ。特に、その様な ℓ の近傍 U_ℓ があって、その中では微分が 0 でない事を示せ。 (cf. 複素幾何や代数幾何の ample)

(3) $U_{\ell_1}, \dots, U_{\ell_m}$ が $\mathbb{P}(TX)$ を覆っている様に、有限個 $\ell_1, \dots, \ell_m$ をうまくとれば、関数の直積 $F = (f_{\ell_1}, \dots, f_{\ell_m}): X \rightarrow \mathbb{R}^m$ が埋込みになっている様に見えることを示せ。

(Hint: まず F が嵌込みになるようにとり、単射性がまずい点を後で補うとよい)

問題 85. Thom-Gysin 完全列を用いて、ユニタリー群 $U(n)$ のコホモロジーを計算せよ。

問題 86. 階数 n のベクトル束 E が至る所非零の切断 s をもつならば、実数の場合 $w_n(E) = 0$, で複素なら $c_n(E) = 0$ である事を示せ。

逆に $w_n(E) = 0$ である様な、階数 n の実ベクトル束 E を構成せよ。

問題 87. E を複素係数の階数 n のベクトル束とする。 $E_{\mathbb{R}}$ を E を実ベクトル束としてみたものとする。この時 $w_{2n}(E_{\mathbb{R}})$ はチャーン類 $c_n(E)$ の mod 2 簡約である事を示せ。さらに $c_n(E)$ はオイラー類 $e(E_{\mathbb{R}})$ に等しい事を示せ。

「位相幾何学」の演習問題 (7/19) 作成：野坂 武史

問題 88. 前回、Grothendieck による Chern 類の定義を与えたが、それが Chern 類理論となる事を示せ。

問題 89. Chern 類理論が存在すれば、それが一意である事を示せ。

問題 90. $S \subset P\mathbb{C}^n$ を特異点のない次数 d の超局面とする（即ち次数 d の斉次多項式の零点で定義する）。 $\alpha \in H^2(P\mathbb{C}^n; \mathbb{Z})$ の正の生成元を S に制限したものとする。その時、 S の全 Chern 類は次となる事を示せ：

$$c(S) = (1 + a)^{n+1}(1 + da)^{-1}.$$

(ヒント： S の法線束 N を考え、その変換関数をみることで $N \cong L^{-\otimes d}$ を示して、Whitney の和公式に適用する)

問題 91. もし n 次元多様体 M が $\mathbb{R}^{n+1}$ にはめ込むことが出来るならば、各 $w_i(TM)$ は i 次カップ積 $w_1(TM)^i$ に等しい事を示せ。もし $\mathbb{R}P^n$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ にはめ込むことが可能ならば、 $n = 2^r - 1$ または $n = 2^r - 2$ の形をしてなければならない事を示せ。

問題 92. B を多様体とし、 E を、 B 上の階数 n の向き付き実ベクトル束とする。「 E 上のスピン構造」という概念の定義を与えよ。 E 上にスピン構造が存在する事の必要十分条件が $w_2(E) = 0$ である事を示せ。

問題 93. (微分同相である) 共役 $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ を考える。その誘導射 $P\mathbb{C}^{2n-1} \rightarrow P : \mathbb{C}^{2n-1}$ は向きを逆にする微分同相となる事を示せ。

「位相幾何学」の演習問題 (8/2) 作成：野坂 武史

問題 94. Chern-Weil 理論で定義した Chern 類が, 接続の取り方に依らない事を示せ。(注意：安直に Stokes の定理を使おうとするとミス。入念な証明が書いてある [志賀、多様体論] などを参照の事)

問題 95. Chern-Weil 理論で定義した Chern 類が, ドラームの定理を通じて Chern 類理論を満たすことを示せ ([小林、接続の微分幾何とゲージ理論] に解答有)

問題 96. (1) 次の線形写像が共役作用に不変である事を示せ。

$$\mathrm{Tr} X^n : \mathfrak{gl}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})\} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad A \mapsto \mathrm{Tr} A^n.$$

(2) 不変多項式環について次が成立する事を示せ (ヒント : $\exp \mathrm{odet} = \mathrm{Troexp}$) :

$$\mathbb{C}[\mathfrak{gl}(n)]^{GL(n; \mathbb{C})} = \mathbb{C}[c_1, \dots, c_n] = \mathbb{C}[\mathrm{Tr} X, \mathrm{Tr} X^2, \dots, \mathrm{Tr} X^n].$$

(3) $\mathrm{Tr} X^2$ に対応する特性類は $c_1(E)^2 - 2c_2(E)$ と書ける事を示せ。(ヒント：ケーリーハミルトンの定理)

問題 97. 次を考える。

$$O(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \mid {}^t A A = E_n\}, \quad \mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \mid {}^t A = -A\}.$$

(1) $q_i : \mathfrak{o}(4n) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\det(A - tE_{4n}) = 1 + q_1(A)t + q_2(A)t^2 + \dots + q_{4n}(A)t^{4n}$ とする。 $i \not\equiv 0 \pmod{4}$ であるとき、 $q_i = 0$ を示せ。

(2) $p_i = q_{4i}$ とおく。不変多項式環について次が成立する事を示せ：

$$\mathbb{R}[\mathfrak{o}_{4n}]^{O(4n)} = \mathbb{R}[p_1, \dots, p_n].$$

問題 98 ([Dirac 作用素の指数定理]. に解答有) 次を考える。

$$SO(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \mid {}^t A A = E_n, \det A = 1\},$$

$$\mathfrak{so}_n = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \mid {}^t A = -A, \mathrm{Tr} A = 0\}.$$

$SO(n)$ は $\mathfrak{so}(n)$ に共役で作用する。

(1) パフィアンと呼ばれる写像 $\mathrm{Pf} : \mathfrak{so}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ を定義し、 $\mathrm{Pf}^2 = \det$ を示せ

(2) 不変多項式環について次が成立する事を示せ：

$$\mathbb{R}[\mathfrak{so}_{2n}]^{SO(2n)} = \mathbb{R}[p_1, \dots, p_{[n/2]}, \mathrm{Pf}].$$

問題 99. パフィアンによる Chern-Weil 理論で定義したコホモロジー類が, ドラームの定理を通じて Euler 類に対応する事を示せ。

問題 100. $ch : \mathrm{Vect}(M) \rightarrow H_{\mathrm{deRahm}}^*(M)$ を Chern 指標とする。 $ch(E \oplus E') = ch(E) + ch(E')$ と $ch(E \otimes E') = ch(E)ch(E')$ を示せ。