

アレクサンダー多項式に関する授業ノート

野坂 武史 (東京工業大学 理学院数学系)

概要

2018 年度の第 1 クォーターの授業のメモである。

この授業に必要な知識として、位相空間・多様体・ホモロジー理論・線形代数・単因子論を仮定する。
この講義ではアレクサンダー多項式とその周辺の話の概説する。

1 概要

アレクサンダー多項式とは、非零な 1 次ホモロジー $H_1(X; \mathbb{Q}) \neq 0$ ¹ となる CW 複体 X に対する多項式不変量である。その歴史は長く、色々な研究があり、応用や関連事項も多い。低次元多様体の研究者にとって必須事項といえよう。「結び目」や「アレクサンダー多項式」というと、簡単な印象を持つ。が実際は、完全にフォローしようとする位相空間・多様体論の基本や細かいチェックや証明が要され、簡単ではない。理解するとなると本や論文を数本を読む必要がある。

そこで、本講義では、アレクサンダー多項式について速成的な入門を私なりに試みた。優れた本 [Adams, CF, Lic, 村杉, 鈴木, Rol] や概論 [Gor, 北合森, Kaw] も多くあるのだが、例や脇道も多く、著者の趣向によったり、冗長になりがちで、本も薄くはない (実際、結び目論は細かい照明が要される)。であるので、細かい証明などは参考文献に投げ出すことにし、要点をまとめるようにした。文献などをたどって、自分で読んで勉強できるようになれば、この講義は成功と思われる。

本論に入る前に、アレクサンダー多項式を考える理由を、大雑把ながら 4 点羅列しておく。

- まず単体ホモロジーだけでは (3 次元以上の) 多様体の分類や性質を取り出せない。実際、(コ) ホモロジーが同じ多様体は山の様にある (例えば、手術理論を使うなど)。それらを分類する基本的な道具になる。
- 3 次元トポロジーでは、基本群が大事である。その中、アレクサンダー多項式は基本群から抽出された、シンプルかつ基本的量である。
- またベッチ数が非零な多様体では、アレクサンダー多項式はよく現れ、等価な不変量が多かったりする。実際、多くの研究手法がある。
- 局所系のアレクサンダー多項式のひな型や、Blanchfield ペアリングの基礎である。

本講義では、これらを (断片的ながらも) 紹介する。

2 被覆空間からのアレクサンダー多項式の導入。

本節の目的は、初学者向け、かつ一般的な設定で、アレクサンダー多項式を導入したい。

¹ $H_1(X; \mathbb{Q})$ が 0 になる場合は、また別の多くの手法がある。3 次元であれば、量子不変量やヒューガードフレアホモロジーなどで、条件 $H_1(X; \mathbb{Q}) = 0$ が本質的に障害になる。

2.1 ローラン多項式環の再考.

この節では、有理係数上のローラン多項式環を考察してみる. つまり,

$$\mathbb{Q}[t^{\pm 1}] := \left\{ \sum_{k=-m}^n a_k t^k \mid a_k \in \mathbb{Q}, \exists m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

ここには自然に和と積構造が入り、可換環になる.

$\mathbb{Z}$ の作用から見てみよう. ここで作用を, $s \in \mathbb{Z}$ に対し, $\sum_{k=-m}^n a_k t^k \cdot s := \sum_{k=-m}^n a_k t^{k+s}$ で定める. この作用は次の様にも見れる: $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ を基底 $\{t^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ とするベクトル空間

$$\cdots \oplus \mathbb{Q}\langle t^{-2} \rangle \oplus \mathbb{Q}\langle t^{-1} \rangle \oplus \mathbb{Q}\langle t^0 \rangle \oplus \mathbb{Q}\langle t \rangle \oplus \mathbb{Q}\langle t^2 \rangle \oplus \cdots \quad (\mathbb{Q}\text{-ベクトル空間として})$$

と見做すと、当該の作用は、基底を単にスライドさせたものと見做せる. (この事より、 $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -加群とは、 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間で $\mathbb{Z}$ の作用されているものと見做せる).

さて次に、任意の n -次多項式 $f = \sum_{k=0}^n a_k t^k \in \mathbb{Q}[t]$ に対し、商環 $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/(f)$ を考えてみよう (但し $a_n \neq 0, a_0 \neq 0$ とする). ベクトル空間としては n 次元であり、基底は $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ である.² 上の作用は、商環 $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/(f)$ にも誘導される. すると、この作用の基底の変化を見てみよう. まず $n-2$ 個までは、

$$1 \mapsto t, \quad t \mapsto t^2, \dots, t^{n-2} \mapsto t^{n-1},$$

となる. だが、最後の基底 t^{n-1} は

$$t^{n-1} \mapsto t^n \equiv -(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1})/a_n$$

となる. イデアル (f) は最後の基底の行先を表すものと見做せる³.

この考察に乗じて、逆に n 次元空間 V に $\mathbb{Z}$ が作用した状況を考えよう (上記より、これは $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -加群である). V の非零な元 v_0 をとって、 n に対し、 $v_0 \cdot s$ を t^s と書こう. ここで、「 V は $1, t, \dots, t^{n-1}$ を基底に持つ」と仮定しよう. すると、 t^{n-1} の行先は、ある $a_0, \dots, a_{n-1}$ があって、 $t^{n-1} \cdot 1 = -a_0 - a_1 t - \cdots - a_{n-1} t^{n-1}$ と書ける. なので、 $f = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n$ と置くと、 V は $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/(f)$ と加群として同型であることが解る.

ここで途中で仮定をしたが、あまり本質的でない. 実際、次の操作をすればよい. 部分 $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ 加群 $W_1 = 1 \cdot \mathbb{Q}\langle t^i \rangle_{i \in \mathbb{Z}} \subset V$ を置くと、上記の考察より、ある f_1 があって、 $W_1 \cong \mathbb{Q}[t]/(f_1)$ となる. 次に、商ベクトル空間 V/W_1 に対し同様にすると、 $W_2 = \mathbb{Q}[t]/(f_2)$ という部分空間をとりだせる. この作業を繰り返せば、次のようになる:

$$V \cong W_1 \oplus \cdots \oplus W_m \cong \mathbb{Q}[t]/(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}[t]/(f_m)$$

以上をまとめると、次の定理で書ける:

定理 2.1 (単因子論の一部). V を有限次元ベクトル空間とし、 $\mathbb{Z}$ の作用を持つとする. V は $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ 加群と見做せる. さらにある非零な多項式 $f_1, \dots, f_m$ があり⁴、次の $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ 加群同型が存在する.

$$V \cong \mathbb{Q}[t]/(f_1) \oplus \mathbb{Q}[t]/(f_2) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}[t]/(f_m). \quad (1)$$

² $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ は PID (単項イデアル整域) にもなる (なぜか?).

³単因子論の言葉で言えば、「体上の正方行列は、(良い基底返還をすれば) コンパニオン行列の直和になるという意味である。」

⁴但し、 f_k の取り方は、 $a \in \mathbb{Q}$ と $t^{\pm 1}$ 倍の取り方の差が出る (何故か? ヒント $(\mathbb{Q}[t^{\pm 1}])^\times = \{at^n\}_{a \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}}$.)

要するに、 $\mathbb{Z}$ 作用付き空間 V を特定したいときは、多項式 $f_1, \dots, f_m$ が解ってしまえばよい事になる。

次節では、この話をトポロジーに当てはめてみよう。

2.2 巡回被覆空間のおさらい

M を連結でコンパクトな多様体 (境界はあってもよい) とする。この小節の目的は、全射準同型 $\alpha: \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ があつたときに、それに付随した被覆 $\widetilde{M} \rightarrow M$ が作る事である。

ここで出てきた単語 $\pi_1(M)$ と「被覆」を即席的に復習する。 $*$ $\in M$ を勝手に取り、

$$\pi_1(M) := \{ f: S^1 \rightarrow M \mid f \text{ は連続, } f(0) = * \} / \text{“ホモトピー同値”}.$$

という集合を考え、そこに自然な群構造が入るのだった。するとたいがいの本や授業では、「(正則) 被覆」 (例えば [服部, 加藤] 参照) というものを定義し、次の対応があることを習うだろう。

定理 2.2. 正則な被覆 $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ に対し、(正規) 部分群 $p_*(\pi_1(\widetilde{M})) \subset \pi_1(M)$ を考える事で次の一対一対応が得られる:

$$\{ \text{正則な被覆 } \widetilde{M} \rightarrow M \} / \text{同型類} \longleftrightarrow \{ N \subset \pi_1(M) \mid N \text{ は正規部分群.} \}.$$

この対応は、確かに綺麗である。しかし、この逆写像は意外に抽象的で、被覆空間が解らない場合が多々ある。そこで本講義では、一般的なこの定理を説明しない。簡単そうな全射準同型 $\alpha: \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ のとき、その $\text{Ker}(\alpha)$ に付随する正則被覆についてのみ、紹介する。

まず次の命題に注意する。

命題 2.3. Y を CW 複体とし、 $[Y, S^1]$ を連続写像 $K \rightarrow S^1$ 全体のホモトピー類の集合とする (ここには $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ よりアーベル群構造が入る)。 $[\phi] \in [Y, S^1]$ に対し、その誘導射 $\gamma(\phi): \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ をおく。この対応 γ を次の加群同型を誘導する:

$$\gamma: [Y, S^1] \longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(Y), \mathbb{Z})^5.$$

Proof. 方針だけ述べる。それは逆写像の構成する事による。 Y に三角形分割を与えて、 Y_k を k -スケルトンとする。すると、 $f: \pi_1(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ より、連続写像 $\hat{f}: Y_1 \rightarrow S^1$ が作れる。しかし $\pi_k(S^1) \cong 0$ ($k > 1$) より、 $\hat{f}$ は Y の 2-skeleton に写像が伸びる。同様に全てのスケルトンにのび、 $Y \rightarrow S^1$ が構成できる。構成から、up to ホモトピーで一意である事が (一般には障碍理論により) 解るので、逆方向の写像が構成で来た。全単射性は構成よりほぼ明らかであろう。[河内, 命題 6.2.5] に初等的で詳細な証明がある。□

この命題より、 α は連続写像 $\alpha: M \rightarrow S^1$ で代表される。

次に、被覆空間たるものを構成する。 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ を $y \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}y)$ で用意する。そこで、次の $X \times \mathbb{R}$ の部分空間 (引き戻し)

$$\widetilde{M} := \{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha(x) = \exp(y) \}.$$

を考えよう。そして $p(x, y) = x, \tilde{\alpha}(x, y) = y$ と置けば、次の可換図式を得る。

⁵ 普遍係数定理より、 $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}) \cong H^1(M; \mathbb{Z})$ である。よって簡単に計算できる。

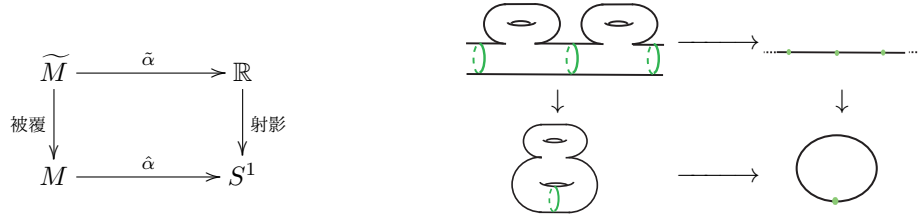


図 1: S^1 値による被覆空間. 右図はその模式図

ここで $\widetilde{M}$ 上の同相写像 $t: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ を $t(x, y) = (x, y + 1)$ で定義する. するとこの $\widetilde{M}$ は巡回 (無限) 被覆空間と呼ばれるものになる.

命題 2.4. $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ は $\{t^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を被覆変換全体とする, 被覆写像である. つまり, $\forall x \in X$ に対し, 開近傍 $O \subset Y$ と, $\widetilde{M}$ の開集合 $\tilde{O}$ は次の条件 (1)(2) を満たすものが存在する:

(1) すべての n に対し, $pt^n = p$ かつ $p|_{t^n \tilde{O}}: t^n \tilde{O} \rightarrow O$ は同相写像である.

(2) $p^{-1}(O) = \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} t^n \tilde{O}$. つまり $\tilde{O}, t^{\pm 1} \tilde{O}, t^{\pm 2} \tilde{O} \dots$ の分離和.

Proof. $pt^n = p$ は定義より解る. $x \in M$ に対し, $\alpha(x) \in V \subsetneq S^1$ となる連結開集合をとると, $p^{-1}(V) = \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} t^n \tilde{V}$ となる开区間 $\tilde{V} \subset \mathbb{R}$ がある. 制限写像 $\exp|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow V$ は同相写像であるので, $O = \alpha^{-1}(V)$, $\tilde{O} = \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{V})$, とおけば, 欲しい条件 (1)(2) を満たすことが解る. $\square$

注意 2.5. α の取り方は, ホモトピーに依っていたが, しかし $\widetilde{M}$ は同相を除いて一意である. 証明は被覆空間の一意性から解る ([河内, p.177] に詳細の証明あり).

なお, $\widetilde{M}$ が連結な多様体である事は, α の全射性とホモトピー長完全列から解る.

2.3 巡回被覆の有理ホモロジー

$\widetilde{M}$ には被覆変換群 $\mathbb{Z} = \{t^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が (胞体的に) 作用する. なので, その作用は有理ホモロジー群 $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ の作用に誘導される. 要は $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ 加群と見做せる. するとアレクサンダー多項式は以下の様に簡単に定義される.

定義 2.6 (有理係数版の定義). V を $H_k(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ とおいて, $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ 加群と見做し, (1) の様に分解する. 積 $f_1 \cdots f_m$ を (α の k 次) アレクサンダー多項式とよぶ. $\Delta_k(t)$ と書く ($k = 1$ のときは, k を抜く場合が多い)

整ホモロジー $H_k(\widetilde{M}; \mathbb{Z})$ (を $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 加群と見做した時,) をアレクサンダー加群とよぶ.

注意 2.7. 定義はシンプルだったが, この定義だと, アレクサンダー多項式は $\mathbb{Q}$ 倍と $t^{\pm 1}$ 倍の分だけ, とり方の差が出る (実際, 単項イデアル (f_i) の f_i の取り方に, そういう差が出るから). しかし, 多項式を一意に定める方法があり, これは後の節 6 で述べる.

また $f_1 \cdots f_m \neq 0$ と非零になる必要十分条件は, $H_k(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ が $\mathbb{Q}$ 上有限次元である事に気づこう. であるので有限次元性が気になる. まず有限次元の必要条件を取り扱おう:

命題 2.8 (もっと一般化は [河内, 命題 6.2.8]). もし $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ は有限次元であるなら, M のオイラー標数 $\chi(M)$ はゼロである.

少し後で, 証明を与える. その前に, 例を挙げておこう.

演習 2.9. 次を示せ: • $M = S^1 \times S^n$ のとき, $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times S^n$ で, よって, $H_n(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t]/(t-1)$ であり, 有限次元.

• M がクラインの壺とする. $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ である. また $\widetilde{M}$ は S^1 にホモトピー同値で, $H_0(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t]/(t-1)$ であり $H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t]/(t+1)$ であり, 有限次元.

例 2.10. $n \geq 2$ で, M が一点和 $S^1 \vee S^n$ とホモトピー同値とする. すると $\widetilde{M}$ は無限個の S^n の一点和になる (図 2 参照) ので, $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ に同型で, 特に無限次元である.

また同様に, M が一点和 $S^1 \vee S^{2n-1} \vee S^{2n}$ にホモトピー同値であるとき, $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ は無限次元である ($\chi(M) = 0$ にも注意).



図 2: 無限個の S^n の一点和と, プーケ $S^1 \vee S^n$

この様に, いつも有限次元性は満たさないが, そうなる状況は幾らかある:

例 2.11. 滑らかな写像 $f: M \rightarrow S^1$ があって **fibred** とする. つまり次元 $\dim(M) - 1$ の多様体 W と, 微分同相 $f: W \rightarrow W$ があって,

$$M = (W \times [0, 1]) / \{(x, 0) \sim (f(x), 1)\}_{x \in W}$$

とかける時を言う⁶. そして誘導射 $f_*: \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ を α と置く. この時, $\widetilde{M}$ は $W \times \mathbb{R}$ に微分同相である. W はコンパクトより, $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ は有限次元である.

なお $\dim(M) = 3$ とすると, W は向付き曲面 $\Sigma_{g,r}$ という形なので, 整ホモロジー $H_1(W; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}^{2g+r-1}$ となる.

演習 2.12. $f_*: H_k(W; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(W; \mathbb{Q})$ の行列表示を A とおくと, Alexander 多項式が行列式 $\text{Det}(tA - I_{\text{rk}H_k(W; \mathbb{Q})})$ と一致する事を示せ (Hint: 単因子論でのコンパニオン行列).

命題 2.13. ホモロジー群 $H_*(M; \mathbb{Q})$ が $H_*(S^1; \mathbb{Q})$ と同型であるとする⁷. この時, $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ は有限次元である.

Proof. $\widetilde{M}$ のセル複体を $1 = t$ で同一視すれば, M のセル複体である. よって短完全列

$$0 \rightarrow C_*^{\text{cell}}(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{1-t_*} C_*^{\text{cell}}(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \rightarrow C_*^{\text{cell}}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

を得る. だから長完全系列

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}^{\text{cell}}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_n^{\text{cell}}(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{1-t_*} H_n^{\text{cell}}(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \rightarrow H_n^{\text{cell}}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \cdots \quad (2)$$

を得る (これは Wang 完全列の特殊版). ここで $n > 1$ に対しては, 仮定より, $1 - t_*$ が同型となる. もしここで $H_n^{\text{cell}}(\widetilde{M})$ が有限次元でないとする, $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ を含むのだが, $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ 上で $1 - t$ 倍は同型でないので矛盾である. よって, $n > 1$ で $H_n^{\text{cell}}(\widetilde{M})$ が有限次元である.

他方で, 残りの場合の $n = 1, 0$ であるが,

$$0 \rightarrow H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{1-t_*} H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_0(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{1-t_*} H_0(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \rightarrow H_0(M; \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

⁶ もしくわ次の様にも言える. f が沈め込みであれば, $\forall x \in S^1$ に対し, 微分同相 $f^{-1}(x)$ が W に同相である.

⁷ 例えば, 埋込 $K: S^{n-2} \rightarrow S^n$ に対し, $M = S^n \setminus \text{Im}(K)$ と置けば, “Alexander 双対定理” より $H_*(M; \mathbb{Z})$ が $H_*(S^1; \mathbb{Z})$ である

を考えよう. 仮定より, 最後の4項は $\mathbb{Q}$ である. よって, 左側の $1 - t_*$ は同型である. よって前段落と同じ議論をすれば, $n \leq 1$ で $H_n^{\text{cell}}(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ が有限次元でなければならない. $\square$

命題 2.8 の証明. もし $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ 全てが有限次元とする. すると, (2) から $\chi(\widetilde{M}) = \chi(\widetilde{M}) + \chi(M)$ より $\chi(M) = 0$ である. $\square$

有限次元性を言及したが, Alexander 多項式をどう計算すべきだろうか?

3 巡回被覆空間と, 分岐被覆空間.

今迄は無限巡回被覆を考えてきたが, トポロジーでは有限被覆を考える事が多い. この小節ではそのホモロジーを言及しておこう. §2.2 で $\widetilde{M} \subset M \times \mathbb{R}$ を定義した. そこで $m \in \mathbb{N}$ に対して, $\widetilde{M}$ に $(x, y) \sim (x, y + m)$ という関係式を入れた空間を m 次巡回被覆空間といい, ここでは $\widetilde{M}_m$ と書こう.

また仮定として, 境界 ∂M が和 $\sqcup^s S^1 \times S^{n-2}$ に同相で, $\widetilde{M}_m$ の境界もそうであるとする (例えば結び目補空間 $M = S^3 \setminus K$ がある). このとき, $\widetilde{M}_m$ の境界に $\sqcup^s S^1 \times D^{n-1}$ を自然に貼りつけたものを, m 次 (巡回) 分岐被覆空間という. これを本稿では B_m と書こう.

分岐被覆空間のホモロジーは次の様に, アレクサンダー加群から導かれることが知られている.

命題 3.1. $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}_m \subset B_m$ は全射準同型 $H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(B_m; \mathbb{Z})$ を誘導し, さらにその核は $(t^m - 1)/(t - 1)H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z})$ で与えられる. 特に, 次を得る:

$$H_1(B_m; \mathbb{Z}) \cong \frac{H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z})}{(t^m - 1)/(t - 1)H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z})} \quad \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \text{ 加群同型として.}$$

証明は [Kaw, §5.5] に書いてある. 次の答えは [Lic, Cor 9.8] にある問題である:

演習 3.2. $M = S^3 \setminus K$ として, Alexander 多項式を $\Delta(t^{-1}) = \Delta(t)$, $\Delta(1) = \pm 1$ となるものとする. この時, m 次分岐被覆空間のホモロジーの位数は, 次で書ける事を示せ:

$$|H_1(B_m; \mathbb{Z})| = \left| \prod_{v=1}^{m-1} \Delta(e^{2\pi\sqrt{-1}v/m}) \right|.$$

他にも, 準同型の個数を計るときにも役立つことがある: 例えば

命題 3.3 (長郷-山口 [NY]). M を結び目の補空間 $S^3 \setminus K$ とする. 準同型の集合

$$\{f \in \text{Hom}(\pi_1(M), SU(2)) \mid f \text{ は既約メタアーベリアン} \}$$

を $SU(2)$ の共役で割った集合は, 有限で位数は $(\Delta_1(-1) + 1)/2$ に等しい.

4 整数係数 Alexander 多項式, とその性質.

ホモロジーを有理係数で考えていた. しかし $\mathbb{Z}$ 上の係数でのホモロジーを考えた方が, 良い情報を取り出すことは多々ある. 実際, ふつう Alexander 多項式は整数係数で考える. この節では, 整数係数で Alexander 多項式を再定義しておこう.

4.1 環 $\mathbb{Z}[t^{\pm}]$ と order に関するコメント.

以上は, 簡単のために, $\mathbb{Q}[t^{\pm}]$ 加群で考えていた. しかし, ホモロジーは $\mathbb{Z}$ 加群で考えると良いことが多い. 整数係数ホモロジー $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Z})$ も $\mathbb{Z}[t^{\pm}]$ 加群の構造が入る.

しかし, 環 $\mathbb{Z}[t^{\pm}]$ は一般に難しい (例えばクルル次元 2). 実際, 有限生成 $\mathbb{Z}[t^{\pm}]$ 加群 M は分類されていない ($|M| < \infty$ の場合でも大変). しかし, 以下の手順で, Alexander 多項式が order というものから定義される.

S を可換環とし, A を有限表示 S 加群とする. つまり, $\exists s, r \in \mathbb{N}$ で

$$S^r \xrightarrow{P} S^s \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad (\text{完全}),$$

があるとする (P は $s \times r$ 行列とみなす). この時, i 番目の初等イデアル $E_i(A)$ を, 次の有限集合で生成されるイデアルと定める:

$$\{ \det(B) \in S \mid B : (s-i) \times (s-i) \text{ サイズの } P \text{ の部分行列} \}.$$

例 4.1. P が行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ であるとき, 次のようになる:

$$E_0 = 0, \quad E_1 = \left\langle \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right\rangle, \quad E_2 = \langle a_{ij} \rangle_{i \leq 2, j \leq 3}, \quad E_3 = A.$$

この初等イデアルは, A のみに依存する.

定理 4.2. このイデアル $E_i(A)$ は有限表示の取り方によらず一意である (ヒント: [CF] 参照)

演習 4.3. これを証明せよ. (ヒント: [CF] に解答あり)

そこで, S がネター環 UFD (一意分解整域)⁸ としよう. すると, ネターなので, $E_0(A)$ を含むような S の最小な単項イデアルが存在する. その単項 $\in S$ を S の **order** といい, $\text{ord}(A) \in S$ と書く. この元は S の可逆元 $S^\times$ の倍数分の取り方を除けば, 一意である (事が容易にわかる).

Order というのは, 次の同値性で見える様に, 振れた加群のための概念である:

演習 4.4. 次の同値性を示せ (ここで $Q(S)$ は S の商体で, $\text{Tor}_S A$ は A の振れ部分加群):

$$\text{ord} A \neq 0 \iff E_0(A) \neq 0 \iff Q(S) \otimes_S A = 0 \iff \text{rank} A = 0 \iff A = \text{Tor}_S A.$$

例 4.5. S を PID とする (例えば $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}[t^{\pm}]$). M を有限生成 S 加群とすると, 単因子論がいうには, ある $m, n \in \mathbb{N}$ と $f_1, \dots, f_m \in S$ があって, S 加群同型

$$M \cong S^m \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq n} (S/(f_i))$$

⁸ 整域 R の零元でも単元でもない元 x が何れも $x = p_1 p_2 \cdots p_n$ のように R の有限個の既約元の積として書くことができ, その表示が一意であるとき R は一意分解環であるという. 例えば, 多項式環 $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_m^{\pm 1}]$ がそうである.

があった. これは有限表示 $S^{n+m} \rightarrow S^{n+m} \rightarrow M \rightarrow 0$ があって, ここで行列表示は対角行列

$$P = \text{diag}[0, \dots (m \text{ 回}) \dots, 0, f_1, \dots, f_n].$$

であった. なので, $E_0 = \det(P)S$ である. 特に, $\text{ord}(A) = \pm \det(P)S$ という事になる.

さて以上の設定を無限巡回被覆に適用してみよう. 次を思い起こそう:

補題 4.6. ネター環上の有限生成加群は, 有限表示可能である.

定義 4.7. M がコンパクト連結な多様体とする. 整ホモロジー $H_k(\widetilde{M}; \mathbb{Z})$ を有限表示可能 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -加群と見做す. その $\text{order} \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を, $(k \text{ 次})$ Alexander 多項式と呼ぶ (ここで定義のズレは $\pm t^{m \pm}$ 倍である).

定義 2.6 の $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ 加群上の定義より, 精密化されている事を見よう:

命題 4.8. $\widetilde{M} \rightarrow M$ を無限巡回被覆とし, $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ が有限次元とする. $\Delta \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を $(k \text{ 次})$ Alexander 多項式とする. Δ を $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ の元と思うと, 定義 2.6 の $(k \text{ 次})$ Alexander 多項式に一致する.

Proof. $S = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ とし, $S^n \rightarrow S^m \rightarrow H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$ を有限表示とする. これはテンソル $\mathbb{Q}$ すると, 普遍係数定理より $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ の有限表示である. Δ はテンソル $\mathbb{Q}$ した後の order と思える. しかし例 4.5 からその order は積 $f_1 \cdots f_m$ だったから, 定義 2.6 の $(k \text{ 次})$ Alexander 多項式に一致する. $\square$

系 4.9. すべての $*$ で $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ が有限次元である事と, すべての Alexander 多項式が非零である事が同値である.

4.2 Alexander 多項式の性質.

前節では定義を与えたが, Alexander 多項式の位相的性質や応用について述べる. 証明は本を参照するに留める.

まず結び目を分類する強さであるが, 7 交点までは完全に分類するが, 同じ Alexander 多項式を持つ結び目は無数にある. また “ミュータント” という移動でうつりあう結び目は同じ Alexander 多項式がもつ事も知られている. 特に, Alexander 多項式が 1 の結び目は大量に作れる.

以下, 有用な性質を羅列する.

命題 4.10. M が $2k+1$ 次元多様体とする.

この時, k 番目の Alexander 多項式は双対性 (*reciprocity*) を持つ. 厳密には, $\Delta_k(t^{-1}) = t^{-\deg \Delta} \Delta_k(t)$ を満たす. つまり

$$\Delta_k = a_{-m} t^{-m} + \cdots + a_0 t^0 + \cdots + a_m t^m \implies a_{-i} = a^i.$$

さらに, $H_s(M; \mathbb{Z})$ と $H_{s+1}(M; \mathbb{Z})$ は捩れ部分群を持たないとする. このとき, Alexander 多項式に $t = 1$ を代入したら, $\Delta_s(1) = \pm 1$ である.

一般的な証明は色々ある⁹が, 結び目の場合には§6で示す. ちなみに, この対称性は中間次数での特有の現象である. 実際, 次が知られている:

命題 4.11 ([Yj]). $n > 1$ とする. 任意の元 $f \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に対して, ある結び目 $K : S^n \hookrightarrow S^{n+2}$ があって, $H_1(S^{n+2} \setminus K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t]/(f)$ となる.

また Alexander 多項式は fibered を判定するのに役立つ:

命題 4.12. M を 3次元とし, M を例 2.11 の様に, fibered とする. この時, 整 Alexander 多項式の最高次係数が ± 1 である.

証明は $H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbb{Z})$ が自由であるからである. なお, この命題の一般には逆は成立しない¹⁰. しかし, ある条件があるとき逆は成立する.

定理 4.13. 結び目 $K : S^1 \hookrightarrow S^3$ が交代的¹¹ とする. もし整 Alexander 多項式の最高次係数が ± 1 であるならば, K は fibered である.

結び目が Slice がどうかは結び目理論で今でも大きな問題である. ここで (滑らかな) Slice であるとは, 埋込 $F : D^2 \hookrightarrow D^4$ があって, $\partial(\text{Im} F) \subset \partial D^4 = S^3$ であり, $F|_{\partial D^2} = K$ である時をいう. Alexander 多項式は (弱い) 判定法を与える.

定理 4.14. 結び目 $K : S^1 \hookrightarrow S^3$ が Slice であるとき, ある多項式 $g(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ があって, $\Delta(t) = g(t^{-1})g(t)$ という形である.

証明は [北合森, 定理 5.3.4] や [Lic, 定理 8.18] にある.

次に, 結び目 $K \subset S^3$ に対し, 次の数を考えよう (K のザイフェルト種数という).

$$g_*(K) := \min\{g \in \mathbb{Z} \mid K \text{ を境界にする種数 } g \text{ のザイフェルト曲面が存在する.}\}$$

次の様に評価を与える:

定理 4.15. $\deg \Delta_1(t) \leq 2g_*(K)$.

証明は $g_*(K)$ のザイフェルト曲面で, 作れば, $\deg \Delta_1(t) = \deg \det(tV - V^T) \leq \text{rk} V = 2g_*(K)$ となるからである. なお等式が成立しない結び目は山ほどあるが, Knot Floer homology により, $g_*(K)$ が決定できることが知られている [OS].

⁹Reidemeister トーションの方法 [北合森, §5.3] 参照. 絡み目群の双対表示による方法 [CF, IX 章] 参照. Blanchfield pairing による方法 [Gor, Kaw, Hil] 参照. などあるが, 一般化するにあたり夫々一長一短がある.

¹⁰Alexander 多項式を圏化したものに, Knot Floer homology があるが, その homology は fibered-ness を完全に判定する [Ni].

¹¹交代的とは, ある図式があって, その arc をたどると, 交点が正負正負... という順にできる事をいう.

5 Alexander 多項式の計算法 I . 交換子群と F O X 微分.

これをどのように計算すべきだろうか？

幾つかの方法を紹介する. 興味のある小節だけ見ればよい.

5.1 交換子群を用いる方法.

$H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ のとき, 1 次アレクサンダー多項式 (加群) を求める安直な方法を述べる.

被覆と部分の対応より, 交換子群 $\pi_1(M)'$ は, $\pi_1(\widetilde{M})$ に同型である. よってそのアーベル化を取れば, 同型

$$H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(M)' / [\pi_1(M)', \pi_1(M)']$$

を得る. ここで右辺に $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ が共役で作用する. その作用で右辺を $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 加群と見做せ, この同型は $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 加群同型である. よって右辺が計算できる. 例えば, M が例 2.11 の様にファイバーなら $\pi_1(M)' \cong \pi_1(W)$ なので, t の作用に気を付けられれば, 計算できそうである: 以下, 例を見ていこう:

例 5.1. 三葉結び目に対し, $M := S^3 \setminus K_{3_1}$ とおく. そのの基本群 $G := \pi_1(S^3 \setminus K_{3_1})$ は次であることが知られている.

$$G := \pi_1(S^3 \setminus K_{3_1}) \cong \langle x, y \mid yxyx^{-1}y^{-1}x^{-1} \rangle.$$

ここでアーベル化 $\pi_1(S^3 \setminus K_{3_1}) \rightarrow \mathbb{Z}$ は $x \mapsto 1, y \mapsto 1$ で定義される. $a = yx^{-1}$ を代入すれば

$$G \cong \langle x, a \mid ax^2ax^{-1}a^{-1}x^{-1} \rangle \cong \langle x, a \mid a(x^2zx^{-2})(xa^{-1}x^{-1}) \rangle$$

であるから, $\pi_1(\widetilde{M}) \cong G'$ に注意して 交換子群のアーベル化は次となる:

$$H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z}) \cong G' / G'' \cong \langle \alpha, t \mid \alpha + t^2\alpha - t\alpha \rangle.$$

よってアレクサンダー多項式は $t^2 - t + 1$ である.

例 5.2. [Rol, §7.D] に依れば, もっと一般に, トーラス結び目 $M = S^3 \setminus T(p, q)$ を考えよう (p, q は互いに素): つまり

$$S^3 \setminus T(p, q) := \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid |x|^2 + |y|^2 = 1, x^p + y^q = 0\}.$$

このアレクサンダー加群が, 上記の手法で次が示せる:

$$\Delta_1(t) = \frac{(1-t)(1-t^{pq})}{(1-t^p)(1-t^q)}, \quad H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] / \Delta_1(t).$$

しかし, 群の表示から求める手法は限界がある. 実際, $\pi_1(M)' / [\pi_1(M)', \pi_1(M)']$ が無限生成になると, この手法はお手上げとなる¹².

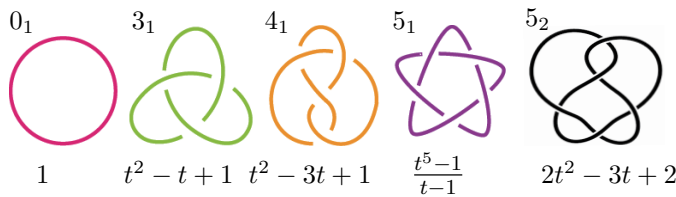


図 3: 結び目と, アレクサンダー多項式の例.

¹²例えば, 結び目の 5_2 結び目では, $H_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] / (2t^2 - 3t + 2)$ であるので $\mathbb{Z}$ 加群として無限生成になる.

5.2 準備：絡み目図式とウィルティンガー表示

Alexander 多項式を 2 次元的に計算する方法を紹介する. これは結び目の Alexander 多項式たちの値に相対的な関係を見ることができる.

それを記述するために, 用語を幾らか準備する (少々厳密性が書けるかもしれないが...). なお以下では S^1 に対し向きを固定し, 埋込・はめ込みなどにも向き込みで考える.

- 絡み目とは, 円の有限和からの滑らかな埋込 $L : \sqcup^m S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ をいう. m を $\#L$ とも書く.
- 二つの絡み目 L と L' がイソトピックであるとは, 或る滑らかな写像 $h : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ があって, 各制限 h_t は $\mathbb{R}^3$ の微分同相で, $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ で $h_1(L) = L'$ を満たす事である.
- 絡み目図式とは, 円の有限和からの正則横断的な滑らかなはめ込み $D : \sqcup^m S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ の事で, 但し, 交点に対して「正」「負」を当てる. ここで正交点は図 7 の L_+ のような図で, 負交点様に図 7 の L_- のような図で, 視覚的に記述される.
- 絡み目 L に対して, 上手い射影 $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ をとると, 合成 $p \circ L$ は絡み目図式を自然に与える.
- 絡み目図式全体に対して, ライデマイスター移動というものを図 4 の様にして定義する.

絡み目全体と, 図式全体との関係は次の様に与えられる.

定理 5.3. 次の一対一対応が存在する:

$$\frac{\{\text{絡み目}\}}{\text{イソトピー}} \xleftrightarrow{1:1} \frac{\{\text{絡み目図式}\}}{\text{イソトピー} + \text{ライデマイスター移動}}.$$

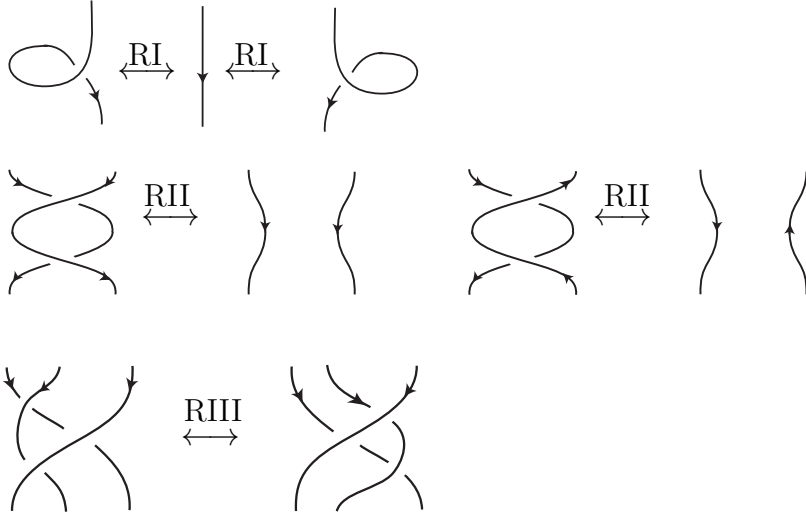


図 4: ライデマイスター移動.

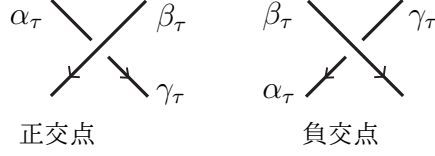
これにより, 絡み目全体を図式から研究できる.

加えて, 向き付き絡み目図式 D から基本群 $\pi_1(S^3 \setminus L)$ を得る方法を述べる. それは Wirtinger 表示と呼ばれる. D の **arc** とは, 交点の切れ目から次の切れ目の区間をいう.

定理 5.4 (Wirtinger 表示 (証明は [Rol])). 基本群 $\pi_1(S^3 \setminus L)$ は次の表示を持つ.

$$\left\langle e_\alpha \ (\alpha \text{ は } D \text{ の arc}) \mid \text{下図の様な交点 } \tau \text{ に対し, } e_{\gamma_\tau}^{-1} e_{\beta_\tau}^{-1} e_{\alpha_\tau} e_{\beta_\tau} \right\rangle.$$

ここで, 不定元 e_α は, アーク α の周りを一周するループで代表される.



イメージ的にもっともな主張だが, 証明はそれほど簡単ではない. しかし, これは認める事にしよう.

まず, この系として, アーベル化に対して次が言える.

系 5.5. アーベル化群 $H_1(S^3 \setminus L; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}^{\#L}$ に同型である.

Proof. $i \leq \#L$ に対し, 二つのアーク α, γ が同じ L の連結成分にあったとすると, Wirtinger 表示より, アーベル化は同じ値になる. α 達は生成元なので, 普遍射 $\pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow \mathbb{Z}^{\#L}$ が作れる. よって結論を得た. $\square$

最後に, 絡み目不変量の例として, 絡み数を見てみよう.

有向な絡み目 L に対し, 図式 D を用意して, 成分ごとに $D = D_1 \cup \dots \cup D_{\#L}$ を分ける. 図式の交点 p に対して, 上記図の様な 2 通りの場合が考えられる. そこで正交点 p に対して, $\epsilon(p) = +1$, 負交点 p に対して, $\epsilon(p) = -1$ と定める. $(i \neq j)$ に対し, i と j 成分の絡み目数を次の和で勘定する.

$$\text{lk}(D_i, D_j) := \frac{1}{2} \sum_{p \in D_i \cap D_j} \epsilon(p).$$

これは図式の取り方に依らない. 同値なトポロジカルな定義がある. [Rol, 5.D 章] には 8 つの定義が書いてある.

定義 5.6. 整数係数 $\#L \times \#L$ 行列 $\{\text{link}(L_i, L_j)\}_{i,j \leq \#L}$ を絡み目行列という. 但し対角成分は 0 とする.

演習 5.7. 絡み目数が整数であることを示せ (ヒント: Jordan 曲線定理). さらに, この絡み目行列が, 結び目図式の取り方によらない事を示せ.

5.3 FOX 微分と Alexander 行列による計算法.

群表示から Alexander 多項式を計算する方法がある.

用語を準備しよう. 群 G に対して $\mathbb{Z}[G]$ を群環とする. つまり,

$$\mathbb{Z}[G] := \left\{ \sum_{\text{有限和}} a_i g_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, g_i \in G \right\}.$$

一般に群環はよくわからない. だが, $H := G$ がアーベル群 $\mathbb{Z}^k \oplus (\oplus_{i=1}^m (\mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z}))$ という場合, $\mathbb{Z}[H]$ は可換環で次の環同型がある:

$$\mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_k^{\pm 1}, s_1, \dots, s_m] / (s_1^{n_1} - 1, \dots, s_m^{n_m} - 1).$$

ここで $\mathbb{Z}[H]$ が UFD になる必要十分条件は, H に振れがない事に気づこう.

次に, FOX 微分と定義 5.10 を述べる. F_I を添字集合 I で生成される自由群とする. $k \in I$ に対し生成元を x_k と書く. ここで **FOX(自由) 微分** とは, $k \in I$ に対して, 定まる準同型 $\frac{\partial}{\partial x_k} : F_I \rightarrow \mathbb{Z}[F_I]$ を次の規則で定めたものとする.

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{i,k}, \quad \frac{\partial(uv)}{\partial x_k} = u \frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad \text{for all } u, v \in F_I.$$

例 5.8. $F_I = \langle x, y \rangle$ とすると, $\frac{\partial yxy}{\partial x} = y \frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = yx \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial x}{\partial x} = y$ であり, $\frac{\partial yxy}{\partial y} = y \frac{\partial xy}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y} = yx \frac{\partial y}{\partial y} + y \frac{\partial x}{\partial y} + 1 = yx + 1$ である.

演習 5.9. まず well-definedness $\frac{\partial((uv)w)}{\partial x_k} = \frac{\partial(u(vw))}{\partial x_k}$ を示せ.

また $\frac{\partial w^{-1}}{\partial x_i} = -w^{-1} \frac{\partial w}{\partial x_i}$ と $\frac{\partial w^n}{\partial x_i} = (1 + w + \cdots + w^{n-1}) \frac{\partial w}{\partial x_i}$ を示せ ($n > 0$).

さらに次も示せ:

$$\forall w \in F, \quad w - 1 = \sum_{i=1}^s \frac{\partial w}{\partial x_i} (x_i - 1).$$

次に, Alexander 行列を復習する. 有限表示群 $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ を固定し, H を G のアーベル化群とし, $\alpha : G \rightarrow H$ をアーベル化とする. **Alexander 行列** とは, G の関係子 $r_1, \dots, r_m$ に対し, 自由微分 $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ を施し, 行列にまとめたものをいう. つまり, 係数が可換 $\mathbb{Z}[H]$ 環上で $n \times m$ の次の行列をいう:

$$A_G := \begin{pmatrix} \alpha\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right) & \cdots & \alpha\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\left(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}\right) & \cdots & \alpha\left(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}\right) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, m, \mathbb{Z}[H]).$$

定義 5.10. A_G の第 k 初等イデアルの事を, k 次イデアル不変量という.

演習 5.11. k 次イデアル不変量は, 群の表示 $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ によらない (つまり Tietz 変換によらない) 事を示せ. (証明は長いですが [CF, 定理 4.5] にある)

もし H が振れがないとき, $\mathbb{Z}[H]$ はネター UFD なので, order が定義できる. 例えば, それにより多変数版の絡み目の Alexander 多項式を定義することができる: 即ち,

定義 5.12. $G := \pi_1(S^3 \setminus L)$ とする. $H \cong \mathbb{Z}^{\#L}$ を系 5.5 から思い起こそう.

A_G の第 k 初等イデアルの order を, $(k$ 次) 多変数 **Alexander 多項式** という.

また 1 成分の時は, 次によってもとの Alexander 多項式を復元する.

定理 5.13. G が結び目の基本群とする (アーベル化は $G \rightarrow H = \mathbb{Z}$ であり, $\mathbb{Z}[H] = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ と同一視する)

この時, k 次イデアル不変量の order は, 節 5.1 の k 次 Alexander 多項式 (定数倍を除き) と一致する.

後の §6.2 で証明する. ここでは例を挙げよう.

例 5.14. $G \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ という 3_1 結び目の基本群とする. 次を計算しよう:

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}(xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1})\right) = \alpha(1 + xy - xyxy^{-1}x^{-1}) = 1 + t^2 - t.$$

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}(xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1})\right) = \alpha(x + xyxy^{-1} - xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}) = -1 - t^2 + t.$$

よって Alexander 行列は

$$(1 - t + t^2 \quad -1 - t^2 + t)$$

となる. だから order の定義から, Alexander 多項式は $1 - t + t^2$ となる.

演習 5.15. 結び目 8_{18} の場合に計算してみて, Alexander 多項式を求めよ. さらに, 8_{18} の第二初等イデアルが, $t^2 - t + 1$ であることも確かめよ.

演習 5.16. トーラス結び目 $T(p, q)$ に対して, 基本群は $\langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$ である事を示し, これに着目し, アレクサンダー多項式を計算せよ.

5.3.1 FOX 微分と, Alexander 行列の位相的意味.

FOX 微分と, Alexander 行列の位相的意味を述べる. ここでは付録 9 に書いた CW 複体の基本事項は仮定する.

局所係数ホモロジーを復習しよう. 一般に, 連結な CW 複体 X とし, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を普遍被覆とする. 特に, $\tilde{X}$ には $\pi_1(X)$ の左作用がある. $\tilde{X}$ に CW 複体が入る. 特に, X の j -セル σ_j に対し, 1 つ持ち上げのセルを $\tilde{\sigma}_j$ を固定すると, 自然な同一視 $p^{-1}(\sigma_j) \simeq \pi_1(X) \times \sigma_j$ と見做せる. 特に, セル複体を見ると

$$C_j(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\sigma_j: X \text{ の } j \text{ セル}} \mathbb{Z}[\pi_1(X)]\tilde{\sigma}_j \quad (3)$$

と同一視される. そこで $\tilde{X}$ のセル複体

$$C_*: \cdots \rightarrow C_k(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{\partial}_k} C_{k-1}(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{\partial}_{k-1}} \cdots \rightarrow C_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} C_0(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

を考えると, 境界準同型 $\tilde{\partial}_k$ が $\pi_1(X)$ に同変である事に気づくだろう.

そこで, アーベル群 M に対し, 作用 $\pi_1(X) \curvearrowright M$ があった時, テンソルした後のホモロジー

$$H_n(C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} M, \tilde{\partial}_k \otimes \text{id})$$

を局所係数ホモロジーという.

例 5.17. 上記の様にアーベル化 $\text{ab}: \pi_1(X) \rightarrow H$ を取り, 正規部分群 $\text{Ker}(\text{ab})$ に対応する被覆を $\bar{X}$ と書く (これを **普遍アーベル被覆** という). そして M を群環 $\mathbb{Z}[H]$ として, 自然に作用させたとき, このセル複体 $C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} M$ は, $\bar{X}$ のセル複体 $C_*(\bar{X}; \mathbb{Z})$ と同一視される.

定義はこうだが, $\tilde{\partial}_k$ は普通よくわからないので, 一般に局所係数ホモロジーはよくわからないものである. しかし 2 次までは次のようになる.

簡単のため, X を CW 複体とし, 0-cell が 1 点, 1-cell が n 個, 2-cell が m 個とする. すると, $\pi_1(X)$ は群表示 $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ と書ける (付録 9 を見よ). しかるに, X の i -cell σ に対して, $p^{-1}(\sigma)$ は $\pi_1(X)$ ぶんの i -cell が対応する. なので, $C_1(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]^n$ に, $C_2(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]^m$ に同一視できる. すると FOX 微分は, 次の様に解釈される:

定理 5.18. $C_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} C_0(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ は $x_k \mapsto 1 - x_k$ に等しい.

また, 境界準同型 $C_2(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{\partial}_2} C_1(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は FOX 微分のヤコビ行列に等しい.

特に, 例 5.17 の様に, $M = \mathbb{Z}[H]$ を考えると, Alexander 行列は, 境界準同型 $C_2(\bar{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{\partial}_2} C_1(\bar{X}; \mathbb{Z})$ に等価である.

証明は端折るが、次が納得できよう。 $H_1(\overline{X}; \mathbb{Z})$ は X のホモトピー同値類によらない量であるので、特に、Alexander 多項式が群表示によらない事になる。

6 ザイフェルト曲面を用いる方法

ザイフェルト曲面を用い、Alexander 多項式の計算法を用いる。これは [Rol, 8 章] と [Lic, 6 章] との概説である (である為、所々、詳細は当該文献に回す)。

$L \subset S^3$ を絡み目とする。その無限巡回被覆を次の準同型に準じて構成する。

$$\alpha : \pi_1(S^3 \setminus L) \xrightarrow{\text{Abel 化}} \mathbb{Z}^{\#L} \xrightarrow{\text{自然な足し算}} \mathbb{Z}.$$

さて、本稿ではこの無限巡回被覆のアレクサンダー多項式を求める方法を述べる。

6.1 ザイフェルト曲面と行列の定義

その為に、ザイフェルト曲面を定義しよう：

定義 6.1. $L \subset S^3$ を向付き絡み目とする。 L のザイフェルト曲面とは、 $S^3 \setminus L$ の向付きコンパクト連結曲面 Σ で、その境界が (向きを含めて) L となるものをいう。

ザイフェルト曲面が正則であるとは、入射 $\Sigma \hookrightarrow S^3$ が標準的な埋込になる時を言う。

定理 6.2. どんな L に対しても、正則なザイフェルト曲面は存在する。

注意 6.3. この存在は一意でない。しかし別にザイフェルト曲面が存在したときに、それは“安定化”という操作で移りあう事が知られている ([Lic, 8 章] 参照)。

Proof. L の図式を D を固定する。そして $\hat{D}$ を図 5 の様にして D から得られる図式とする。ここで注意する事に、 $\hat{D}$ は各交点の周りの小さな近傍に対し、向きが一致するように交点を取り除かれている。この $\hat{D}$ は $\mathbb{R}^2$ 内の向付け可能な単純閉曲線の分離和になっている。この $\hat{D}$ を、互いに交わらない何枚かの円盤の和の境界と見做そう。この円盤らを、もともと交点のあったところで半ひねりの帯でつなげよう。つまり、各円板には、 $\hat{D}$ の向きと帯の向きを上手くそって貼合わせる事により、 L を境界とする有向曲面を構成できる。この時、連結でなければ、うまくチューブを繋いでやれば、連結となる。 $\square$

別証 (但しアイディアのみ). 命題 2.3 より α に付随する C^∞ -級写像 $S^3 \setminus L \rightarrow S^1$ を取る。命題 2.3 の証明より、 $\alpha^{-1}(0) \cap \partial(S^3 \setminus L)$ が丁度 $\#L$ 個の点になるようにできる。そこで 0 を正則値としてよいので、 $\Sigma := \alpha^{-1}(0)$ と定めれば、向き付きの曲面が出来上がる。ここでもし Σ が連結でなければ、うまくチューブでつなげれば良い。 $\square$

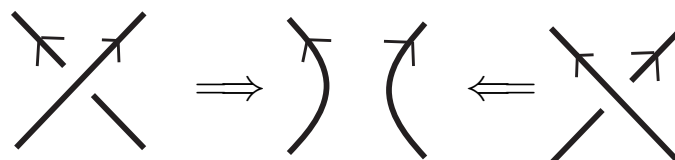


図 5: ザイフェルトアルゴリズム

なお [Lic, 5.A] にこれで構成されたザイフェルト曲面が例示されている。また google で簡単に例がもっと見つかる。なお構成された曲面が向付け可能なのか種数は何かをチェックしたければ、オイラー標数を計算して曲面の分類定理を用いればよい。

演習 6.4. 8 の字結び目 K_{4_1} と, 非連結和 $K_{3_1} \sqcup K_{4_1}$ に対して, ザイフェルト曲面を構成せよ (これに答えると, 証明方針の意義が良く分かる.)

演習 6.5. $\Sigma \subset S^3$ を正則なザイフェルト曲面とし, $N(\Sigma)$ を管状近傍とする. この時, 補空間 $S^3 \setminus N(\Sigma)$ はハンドルボディ¹³になる事を示せ. (ヒント: 図 6 を, ディスクに 1 ハンドル g 個 attach したものと見做す. すると補空間に双対 2 ハンドルが対応できる. なので補空間も ブーケ $\vee^m S^1$ にホモトピー同値となる.)

目標 (定義 6.12) はザイフェルト曲面を用いて, Alexander 多項式を定義する事である. その為に, 一つ補題を用意する (Alexander 双対の一例).

補題 6.6 ([Lic, 命題 6.3] 参照). $\Sigma \subset S^3$ を種数 g の正則な Seifert 曲面とする. この時, ホモロジー群 $H_1(S^3 \setminus F; \mathbb{Z})$ と $H_1(F; \mathbb{Z})$ は $(\mathbb{Z}^{2g+\#L-1})$ として) 同型である. さらに, 非退化双線形式

$$\beta : H_1(S^3 \setminus F; \mathbb{Z}) \times H_1(F; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

で, F と $S^3 \setminus F$ の中で向付き単純閉曲線 c と d に対し, $\beta([c], [d]) = \text{lk}(c, d)$ となるものが存在する.

概証. V を F の S^3 内での正則近傍とし, V' を $S^3 \setminus F$ の閉包とする. $V \cup V' = S^3$ と $V \cap V' \simeq \partial V$ から, Mayer-Vietoris 完全列より,

$$H_2(S^3; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\partial V; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(V; \mathbb{Z}) \oplus H_1(\partial V'; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(S^3; \mathbb{Z})$$

を得る. 両端は 0 だから, 真ん中の射は同型である.

今現れた H_1 達を調べよう. 図 6 の黒線のように, ザイフェルト曲面を変形する. すると, $H_1(V; \mathbb{Z}) \cong H_1(F; \mathbb{Z})$ の生成元 $\{f_i\}_{i \leq 2g+\#L-1}$ を, 図の赤線と緑線たちで取れる. そして, $H_1(V'; \mathbb{Z})$ の元 e_i , を図 6 のように $(f_i$ の周り一周する元) としてとろう. これは $H_1(V'; \mathbb{Z})$ の生成元である事が確かめられる. すると, それらは ∂V 中の単純閉曲線と見做せ, さらに, $H_1(\partial V; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g+\#L-1} \oplus \mathbb{Z}^{2g+\#L-1}$ の生成元となる事が, 上記の同型性から解る.

ここで, $\beta([e_i], [f_j]) = \delta_{ij}$ で β を定義する. さらに, 図 6 からみれば $\beta([c], [d]) = \text{lk}(c, d)$ となる事が (線形的な拡張として) 確かめられる. これは構成から非退化である. $\square$

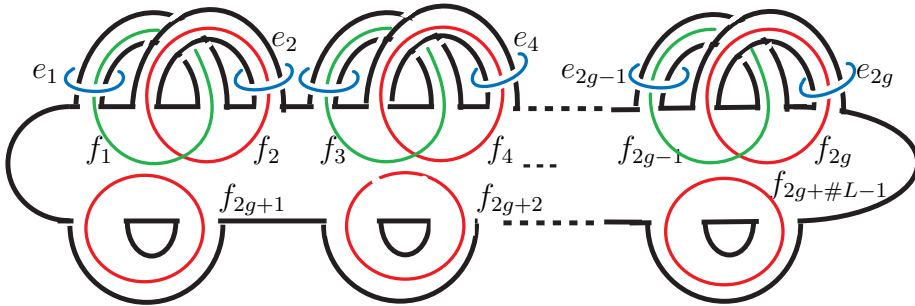


図 6: ザイフェルト曲面の H_1 の生成元 $[f_j]$ と, $H_1(S^3 \setminus F)$ の生成元. 絵が下手ですみません.

例 6.7. [OSJS, 3 と 4 頁] にて, 今の証明を, trefoil 3_1 で丁寧に書いてある.

¹³(3 次元) ハンドルボディとは, 境界付き 3 次元多様体で, ブーケ $\vee^m S^1$ にホモトピー同値であるものをいう. これは閉曲面 $\Sigma_m \subset \mathbb{R}^3$ を境界にもつ自然な 3 次元多様体しかないことが知られている.

さて, 次にザイフェルト行列を導入する. その為に, 閉区間 $[0, 1]$ のフローを用いて,

$$\bullet^+ : F \times \{0\} \longrightarrow F \times \{1\}$$

という同相写像を定義しておく.

定義 6.8. $L \subset S^3$ を向付き絡み目とし, F をザイフェルト曲面とする. F のザイフェルト行列とは, 次で定義する双線形写像である:

$$H_1(F; \mathbb{Z}) \times H_1(F; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad ([\alpha], [\beta]) \longmapsto \text{lk}(\alpha, (\beta)^+).$$

ここで α, β は $H_1(F; \mathbb{Z})$ の元を代表する F 内のループである.

注意 6.9. $\bullet$ これは well-defined である [Lic, 命題 6.3].

- ザイフェルト行列は結び目不変量ではない事に注意しよう.
- なお, この手法は, 有理ホモロジー球面内の結び目に対しても一般化できる.

このザイフェルト行列を用いる事で, 次の様な有限表示を与える事が出来る:

定理 6.10. 環を $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ と Λ と書くことにする (結び目業界ではこれが何故か定着). 行列 $tV^T - V$ は $H_1(\widetilde{S^3 \setminus L}; \mathbb{Z})$ の行列表示を与える. つまり,

$$\Lambda^{2g} \xrightarrow{tV^T - V} \Lambda^{2g} \longrightarrow H_1(\widetilde{S^3 \setminus L}; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact}).$$

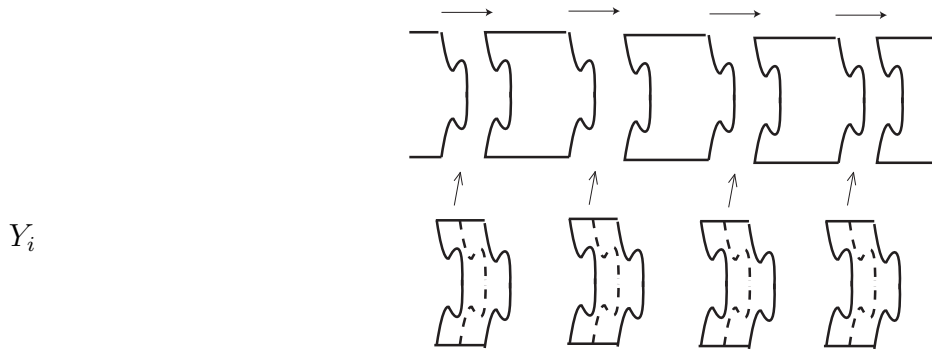
この定理の証明の為に, ザイフェルト曲面 F から, 無限巡回被覆を構成しよう. F は有向より, 開管状近傍 $F \times (-1, 1) \subset S^3 \setminus F$ が取れる. Y を $S^3 \setminus F \times (-1, 1)$ とすると, 境界 ∂ は

$$F_- = F \times \{-1\} \quad \text{と} \quad F_+ = F \times \{1\} \quad \text{と} \quad K \times (-1, 1)$$

との和集合である. $\{-1\}$ から $\{1\}$ へずらず同相写像 $\phi : F_- \rightarrow F_+$ を固定する. 次に, $i \in \mathbb{Z}$ に対して, Y のコピーを Y_i と置く. 自然な微分同相 $h_i : Y_i \rightarrow Y_{i+1}$ を取る. 和 $\sqcup_{i \in \mathbb{Z}} Y_i$ の商空間

$$X_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} Y_i / \{(x, i) \sim (\phi \circ h_i(x), i+1)\}_{i \in \mathbb{Z}, x \in F_+}$$

を考える. 図的には下図である. すると自然な自己同相写像 $t : X_\infty \rightarrow X_\infty$ が $t|_{Y_i} := h_{i+1} h_i^{-1}$ により定義できる.



命題 6.11. この自然な射影 $X_\infty \rightarrow S^3 \setminus K$ は α に付随した無限巡回被覆になっている.

無限巡回被覆になる事は命題 2.4 の証明の通りである. しかし, α に付随する事の証明は少し厄介で, [Lic, 定理 7.9] らへんに書いてある (ので省略する).

定理 6.10 の証明 ([Lic, 定理 6.5] にある証明の概略). X_∞ を次の様に二つに分ける: $Y' := \cup_{i \in \mathbb{Z}} Y_{2i+1}$, $Y'' := \cup_{i \in \mathbb{Z}} Y_{2i}$. すると, 和 $Y' \cup Y''$ は X_∞ であるから, Mayer-Vietoris 系列より次を得る:

$$H_1(Y' \cap Y'') \rightarrow H_1(Y') \oplus H_1(Y'') \rightarrow H_1(X_\infty) \xrightarrow{\delta^*} H_0(Y' \cap Y'') \rightarrow H_0(Y') \oplus H_0(Y'') \rightarrow \mathbb{Z}$$

気づきたい事に, 共通部分 $Y' \cap Y''$ は F の可算無限個コピーであるから, 連結成分を見れば, 真中の δ^* が零写像である事が知られている.

さらに H_1 を考察しよう. $H_1(Y' \cap Y'')$ は $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \otimes H_1(F; \mathbb{Z})$ と同一視できる. また補題 6.6 より $H_1(S^3 \setminus F; \mathbb{Z}) \cong H_1(F; \mathbb{Z})$ であったので, $H_1(Y')$ は $(\mathbb{Z}[t^{\pm 2}])^{2g+\#L-1}$ に, $H_1(Y'')$ は $(t\mathbb{Z}[t^{\pm 2}])^{2g+\#L-1}$ に同一視される. よって, 上記の完全列は次となる.

$$(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])^{2g+\#L-1} \xrightarrow{\alpha_*} (\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])^{2g+\#L-1} \rightarrow H_1(X_\infty) \rightarrow 0 \quad (exact).$$

あとは真中の射を調べればよい. V_{ij} をザイフェルト行列の ij 成分としよう. それは, Mayer-Vietoris 完全列の構成と, 補題 6.6 を見れば,

$$\alpha(1 \otimes [f_i]) = \sum_{j \leq \text{rk} V} (-V_{ij}(1 \otimes [e_j]) + V_{ji}(t \otimes [e_j]))$$

である事が確かめられる (省略). なので, 完全列より, 欲しい行列表示を得た. □

この行列表示に出た, 行列を用いて次を定義しておこう:

定義 6.12. 次の多項式を **Alexander 多項式** と呼ぶ.

$$\Delta_K(t) := \det(t^{-1/2}V^T - t^{1/2}V) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}].$$

定義 4.7 では行列表示で Alexander 多項式を定義したが, 上定理より, 二つは一致する:

系 6.13. この定義と, 定義 4.7 のものは, 定数倍を除いて, 一致する.

さてまた, Alexander 多項式の性質も簡単に示しておこう:

命題 6.14. 双対性 $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$ が成立する.

さらに, 結び目の場合, $t = 1$ を代入すると, $\Delta_K(1) = 1$ である.

Proof. 前半は次を確かめればよい: $\Delta_K(t^{-1}) = \det(t^{1/2}V^T - t^{-1/2}V) = (-1)^{\text{rk} V} \det(t^{-1/2}V^T - t^{1/2}V) = \Delta_K(t)$. まん中の等式は行列式の転置の不変性から.

後半を示そう. いつもの閉曲線 $\{f_i\}$ を基底として, ザイフェルト行列 V をとる. $\Delta_K(1) = \det(V^T - V)$ であるが, その ij 成分は

$$(V - V^T)_{ij} = \text{lk}(f_i^-, f_j) - \text{lk}(f_i^+, f_j)$$

であり, つまり f_i と f_j の F 内での代数的交叉数である. これは $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の g 個対角ブロックとなるように出来る. よって, その $\det$ は 1 である. □

注意 6.15. Alexander 多項式の order による定義では, $\pm t^{\pm 1/2}$ 倍の取り方を気にするはずだった. しかし, K を結び目の場合, $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$ と $\Delta(1) = 1$ との性質から, 一意に定まる.

● もっとも絡み目の場合について言及すると, 定義 6.12 は Seifert 曲面の取り方によらず, ($\pm t^{\pm 1/2}$ 倍を気にせず) 定まっている事が知られている ([Lic, §8] 参照).

ちなみに, 高次元の結び目 $S^k \hookrightarrow S^{k+2}$ に対しても同様の結果が得られる. ザイフェルト曲面を用いて, k 次アレクサンダー多項式が定義される ([Hil, Rol] など参照)

6.2 Seifert 行列再考：他の定義との関連.

定理 5.13 つまり, Fox 微分を用いた定義 5.12 が, 定義 4.7 と一致する事を見よう.

本講義では, 簡単のため結び目 $S^3 \setminus K$ のみに限って, 証明する.

この目的のために, 今から $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の良い表示 (4) を与えよう. これは “ヒーガード分解” とよばれるものの特殊版である ([Lin, §2] に詳細あり). まず一周する 1-ハンドル $\mathcal{H} \subset S^3 \setminus K$ で経線 $\mathbf{m} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ を代表するものを取り, そして種数 g の Seifert 曲面 $F \subset S^3 \setminus K$ を取る. そして次の二つの開集合に留意しよう:

$$U^\sharp := S^3 \setminus F, \quad U^\flat := \mathcal{H} \cup (F \text{ の管状近傍}).$$

そこで気づく事に, 共通部分 $U^\sharp \cap U^\flat$ が F の上澄みと F の下澄みとなる事がみてとれる. ここで演習 6.5 によれば, $U^\sharp$ (resp. $U^\flat$ と $U^\sharp \cap U^\flat$) は, それぞれ種数 $2g$ (resp. $2g + 1$ と $4g$) のハンドルボディになっている.

図 6 に合ったように, ループ達 e_i と f_i ($1 \leq i \leq 2g$) をとろう. すると, $\pi_1(U^\sharp)$ は, $\{(f_1)^+, \dots, (f_{2g})^+\}$ を生成元にする自由群である. 同様に, $\pi_1(U^\flat)$ は $\{(f_1)^-, \dots, (f_{2g})^-, \mathbf{m}\}$ を基底に, $\pi_1(U^\sharp \cap U^\flat)$ は $\{(f_1)^+, \dots, (f_{2g})^+, (f_1)^-, \dots, (f_{2g})^-\}$ を生成元にする自由群である事が確かめられる. 他方で, $\{e_1, \dots, e_{2g}\}$ は $\pi_1(U^\sharp)$ の他の生成元となる事に気づいておこう. 補題 6.6 の証明より, $e_i^\flat$ と f_j との絡み目数が δ_{ij} となるのだった. そこで入射

$$i : U^\sharp \cap U^\flat \hookrightarrow U^\sharp \quad \text{と} \quad i' : U^\sharp \cap U^\flat \hookrightarrow U^\flat$$

とを考えよう. すると, van-Kampen の定理から次の $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の表示を得る:

$$\langle \mathbf{m}, e_1, e_2, \dots, e_{2g}, \mid \mathbf{m} a_j \mathbf{m}^{-1} b_j^{-1}, \quad (1 \leq j \leq 2g) \rangle, \quad (4)$$

ここで右辺内の a_j と b_j は $\{e_1, \dots, e_{2g}\}$ の語で書ける事に注意する. 実際, $\pi_L = \pi_1(U^\sharp \cup U^\flat)$ は生成元 $\{f_1, \dots, f_{2g}, (e_1)^-, \dots, (e_{2g})^-, \}$ に関係子 $i_*(e_j) i'_*(e_j)^{-1} = \mathbf{m} \cdot i_*((f_j)^+) \cdot \mathbf{m}^{-1} \cdot (i_*((f_j)^-))^{-1}$ を付随したものである, ここで残りの生成元 $(e_1)^-, \dots, (e_{2g})^-$ が $i_*(e_j^-) i'_*((e_j)^+)^{-1}$ によって相殺されている.

例 6.16 (三葉結び目). 一般のその表示の求め方に関しては, [Lin, 北合森] に書いてある. その手順を踏めば, 三葉結び目に関しては次の表示が与えられる:

$$\pi_1(S^3 \setminus 3_1) \cong \langle x_1, x_2, h \mid h x_1 x_2^{-1} h^{-1} = x_1, \quad h x_2 h^{-1} = x_2 x_1^{-1} \rangle.$$

すると Trotter 氏は X_∞ のセル複体を記述した (氏はもっと一般的設定を示してるが ...)

定理 6.17 ([Tro, 命題 4.1]). 次の複体は, X_∞ のセル複体と同型である.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^{2g} \xrightarrow{(V^T - tV, \vec{w})} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^{2g+1} \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (\text{exact}).$$

ここで, $\vec{w}$ は或る縦ベクトルである.

証明方針. また他方で, ∂_1 が $e_j^{(i)} \mapsto 1-t$ となる事は, X_∞ の 0 セルの形から解る.

だから, ∂_2 を具体的に描けばよい.¹⁴

X_∞ の基本群の表示を与える. $i \in \mathbb{Z}$ に対し, e_j のコピーを $e_j^{(i)}$ をとる. すると, 上記の文字 $a_j^{(i)}$ を, 全ての e_j を $e_j^{(i)}$ に置き換えたものとする. $b_j^{(i)}$ も同様とする. すると, Reidemeister-Shreier 手法によれば, $\pi_1(X_\infty)$ は次の表示を持つ:

$$\langle e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{2g}^{(i)}, \quad (i \in \mathbb{Z}) \mid a_j^{(i+1)}(b_j^{(i)})^{-1}, \quad (1 \leq j \leq 2g) \quad (i \in \mathbb{Z}) \rangle.$$

右辺の関係式を $r_j^{(i)}$ と書き, X_∞ の 2-cell とみなそう. なので, $\partial_2(r_j^{(i)})$ は, 各 e_j 達を e_j^- に押し出したものと, 各 e_j 達を e_j^+ に押し出したものの差になる事が解る.

ここで定理 6.10 の証明にあった, α_* を思い起こそう. これはその欲しい差と一致する事が, α_* の定義と前段落の構成から確かめられる. 他方で, ベクトル $(\frac{\partial \mathbf{ma}_j \mathbf{m}^{-1} \mathbf{b}_j^{-1}}{\partial \mathbf{m}})$ を $\vec{w}$ とおこう. よって, ∂_2 は $\alpha_* = (V^T - tV, \vec{w})$ で書けたことになった. $\square$

さて, 定理 5.13 の証明を与える.

定理 5.13 の証明. 演習 5.11 によれば, Alexander 行列は π_K の表示によらなかったのて, π_K を上の表示として良い. また命題 6.14 によって, 基礎環 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に $(1-t)^{-1}$ を添加した環 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, (1-t)^{-1}]$ を基礎環に置き換えても差し支えない.

定理 5.18 によれば, ∂_2 は (4) の Alexander 行列に等しい事に注意しよう. さて, 定理 6.17 の複体にあった, ∂_1 の切断を $\vec{w}$ を相殺するようにとれば, ∂_2 の k -次 order は, $V^T - tV$ の $(k-1)$ -次 order に等しい. 他方で, 定理 6.10 から, $V^T - tV$ は $H_1(X_\infty; \mathbb{Z})[(1-t)^{-1}]$ の有限表示になっている. よって, 二つの定義は一致する事が解った. $\square$

6.3 スケイン関係式. 3次元結び目の Alexander 多項式の公理化.

Alexander 多項式の性質を考えてみよう:

定義 6.18. アレクサンダー写像とは次を満たす写像 $A : \{ \text{絡み目図式} \} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{2}}]$ の事である.

- 絡み目図式 D_1, D_2 が Reidemeister 移動で移りあう時, $A(D_1) = A(D_2)$.
- 自明な結び目 U に対し, $A(U) = 1$ とする.
- 3つの向き付き絡み目 L_+, L_-, L_0 が, ある 1 点の近傍のみで, 図 7 の様に, 異なり, 他の部分で全く等しい場合, 次の関係式 (スケイン関係式という) が成立する:

$$A(L_+) - A(L_-) = (t^{-1/2} - t^{1/2})A(L_0).$$

天下りで定義したが, 次の定理が知られている:

定理 6.19. この様なアレクサンダー写像は一意的に存在し, さらに任意の結び目 $S^3 \setminus K$ に対し, $A(K)$ は $\Delta_1(t)$ に定数倍を除いて等しい.

一意性の証明は [Lic, 定理 15.2] に, 存在証明は [Lic, 定理 8.6] か [北合森, §3.2] に書いてある. 証明は重要という訳ではなく, こんな関係式があると思って頂ければ良い. この定理は, 他の不変量がアレクサンダー多項式に一致する事を示すときに使える.

また, このスケイン関係式を用いれば, 原理的には計算できる事を意味する.

¹⁴高度な注意. ここで, 一般論として, X_∞ の高次ホモトピー群が消えているので, $\pi_1(X_\infty)$ の群複体と, X_∞ のセル複体はホモトピー同値である. 特に, ∂_2 は $\pi_1(X_\infty)$ の群表示から得られる, ものと一致する. また X_∞ は 3 ハンドルがないので, ∂_3 はゼロである.

演習 6.20. この定理を用いて、5 交点以下の結び目のアレクサンダー多項式を計算しなさい.

最後にスケイン関係式について証明を書いておこう.

定理 6.19 の存在性についての証明. 上記の Alexander 多項式が, スケイン関係式を満たすことを示せばよい.

L_0 のザイフェルト曲面 F_0 を図 8 に出てくるもののようにとる (これは定理 6.2 の証明から可能). 同様に, L_+ と L_- のザイフェルト曲面を図 8 の様にとる. それぞれのザイフェルト行列を V_0, V_+, V_- とする.

さて, $H_1(F_0; \mathbb{Z})$ の生成元として, 閉曲線たち $\{f_2, \dots, f_n\}$ を取る. すると f_1 を図 8 の様にとれば, 閉曲線たち $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ が $H_1(F_{\pm 1}; \mathbb{Z})$ の生成元である事が解る. すると, ホモロジーの生成元を見る事で, V_+ と V_- は次で書ける:

$$M_+ = \begin{pmatrix} M_0 & \mathbf{w} \\ \mathbf{v}^T & n \end{pmatrix}, \quad M_- = \begin{pmatrix} M_0 & \mathbf{w} \\ \mathbf{v}^T & n+1 \end{pmatrix}.$$

ここで $\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ はある行ベクトルである. すると行列式の性質から, 次が確かめられる.

$$\det(tV_+^T - V_+) - \det(tV_-^T - V_-) = (1-t)\det(tV_0^T - V_0)$$

である. これに $t^{-\text{rk}V_+/2}$ を書け, $\Delta_L(t)$ の定義に戻る事で, ほしいスケイン関係式を得ることが出来た. $\square$

6.4 他の手法いくらか.

アレクサンダーによる, ドットを用いた方法。

カウフマンによるステート和による方法

Colored Jones 多項式 (Melvin-Morton 予想) との関連 [OSJS, 5 章] を参照.

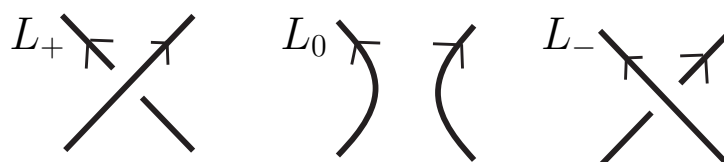


図 7: スケイン関係式に現れる図

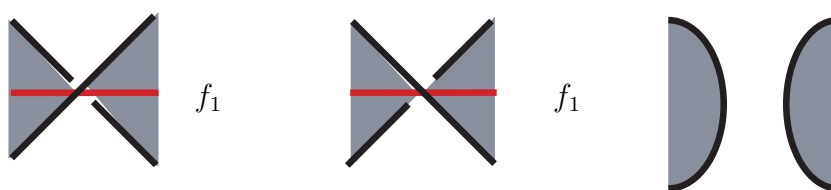


図 8: ザイフェルト膜の取り方と, 単純閉曲線 f_1 .

7 Reidemeister トーション

7.1 トーションの流れ.

まず、動機付けの為にトーションの簡単な歴史ないし大切な結果を羅列しておこう.

- (i) Reidemeister による体上のトーションが定義される. 3次元レンズ空間が分類される.
- (ii) Franz により, 高次元レンズ空間もトーションにより分類される.
- (iii) Whitehead により, 任意の環上でも定義される. 但し Whitehead 群が鍵となる.
- (iv) Milnor [Mil4] により, Alexander 多項式とトーションの関係などが研究される.
- (v) Turaev [Tu1, Tu2] によって, 任意の複体上でトーションが refine される. 手術公式や, Spin^c 構造の考察が進み, 公理化もされる ([Nic] 参照). 特に, ベッチ数 1 以上の 3次元多様体の不変量¹⁵ が色々と, トーションと一致する事が解る. コホモロジー環やマッセイ積の関係も ([Tu2] 参照)
- (vii) 2000 年を超すと, 振れ版のトーションも定義され, 研究される. 振れにする事でとらえる幾何構造も精密化・明確化される (概論 [FV] とその中の文献を参照)

こういった事を厳密に学ぼうとすると, 結構しっかり本や論文を読まないといけない. 入門的文献として, 入門書 [Tu1, Mas] があったり, 日本語には [門上, 北合森] がある. また本格的には [Nic, Tu2] などの本もある (なお Turaev が近々新たな本を出すらしいが..)

7.2 トーションの代数的定義

前置きはともかく, 話を勧めよう.

可換体 $\mathbb{F}$ を固定し, $\mathbb{F}$ 上有限次元の非輪状複体を考える:

$$C_*: \quad 0 \rightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0, \quad (\text{完全}). \quad (5)$$

ただし, ここで C_q の基底 $\mathbf{c}_q := \{c_1^{(q)}, \dots, c_{n_q}^{(q)}\}$ を固定しておく. トーションとは, そのような非輪状複体 (とその基底) の不変量である. いきなり定義を述べるとわかりづらいので, アイディアから述べる.

ただ一つだけ略記を準備する (頭に入れるよう!). もし二つの基底 C_q の基底 $\mathbf{a}_q := \{a_1, \dots, a_m\}$ か $\mathbf{b}_q := \{b_1, \dots, b_m\}$ があったとする. すると $a_i = \sum_{j=1}^m d_{ij} b_j$ と基底変換に出てくる行列 $\{d_{ij}\}$ を得る. この行列式 $\det\{d_{ij}\}$ を $[\mathbf{a}_q/\mathbf{b}_q]$ と書くことにする.

例 7.1. $m = 1$ を考えよう. つまり, 完全列 $0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ なので, 同型射 $\partial_1: C_1 \rightarrow C_0$ を想定している. 基底の取り方によらない量 (固有多項式など色々ある) が欲しい. ここでは行列式の逆元 $\det(\partial_1)^{-1}$ をトーションとして定義する.

例 7.2. $m = 2$ で, 分裂単完全列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{(f,0)} M \oplus N \xrightarrow{(0,g)^T} N \rightarrow 0$ を考えよう. 完全性より f, g は同型である. このとき, 比 $\det f / \det g$ をトーションとして定義する.

¹⁵例えば, Euler class のトーション, Casson 不変量, LMO 不変量, Seiberg-Witten 不変量など

例 7.3. 長さ 2 ので一般の場合を考えよう. つまり, 完全列 $0 \rightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \rightarrow 0$ を考えている. $\text{Im}(\partial_{q+1}) = B_q \subset C_q$ と書いて置こう. そして, B_q の基底を $\mathbf{b}_q$ を取る. すると短完全列分解より次のを得る:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} B_q \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow Z_q \hookrightarrow C_q \longrightarrow B_{q-1} \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow B_{q-1} \xrightarrow{\cong} C_{q-1} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

ここで体 $\mathbb{F}$ 上なので, 切断 $\mathfrak{s} : B_{q-1} \rightarrow C_q$ がとれ, 真中の短完全系列は, 直和分解となる.

$$0 \longrightarrow Z_q \xrightarrow{\partial_{q+1}} \text{Im}(\partial_{q+1}) \oplus \text{Im}(\mathfrak{s}) \longrightarrow B_{q-1} \longrightarrow 0.$$

$\tilde{b}_{q-1}$ を $\mathfrak{s}(\mathbf{c}_{q-1})$ と書こう.. すると, $\mathbf{c}_{q+1}$ と $\tilde{b}_{q-1}$ の和集合は, C_q の基底を与える. なので, その基底変換の行列式 $[\mathbf{c}_{q+1}, \tilde{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q]$ を得る. いま切断 $\mathfrak{s}$ を取ったが, 切断の取り方によらない (何故か?).

また一つ目と 3 つ目の基底返還の行列式を考えられる: $[\mathbf{b}_{q+1}/\mathbf{c}_{q+1}]$ と $[\tilde{b}_{q-1}/\mathbf{c}_{q-1}]$.

するとトーシオンは, それらの交代的な積で定義される:

$$[\mathbf{b}_{q+1}/\mathbf{c}_{q+1}]^{-1} [\mathbf{b}_q, \tilde{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q] [\tilde{b}_{q-1}/\mathbf{c}_{q-1}]^{-1}.$$

次に一般的な設定で定義しておこう:

定義 7.4 (Reidemeister トーシオン). 完全列 (5) に対し, 短完全分解を取る.

$$S_q : 0 \longrightarrow Z_q(C_*) \longrightarrow C_q \longrightarrow B_{q-1}(C_*) \longrightarrow 0$$

Reidemeister トーシオン, $\tau(C_*)$ とは, 次の交代積で定義される.

$$\tau(C_*, \mathbf{c}_q) := \prod_{q=0}^m [b_q, \tilde{b}_{q-1}/c_q]^{(-1)^{q+1}} \in \mathbb{F} \setminus 0$$

命題 7.5. この定義は, B_q の基底の取り方によらない.

Proof. 別の基底 $\{b'_q\}$ を持ってきた時, 基底の変換行列に関して

$$[b'_q, \tilde{b}'_{q-1}/c_q] = [b_q, \tilde{b}_{q-1}/c_q] [b'_q/b_q] [b'_{q-1}/b_{q-1}]$$

が成立する. よって, 次の計算式から不変性が解る:

$$\begin{aligned} \prod_{q=0}^m [b'_q, \tilde{b}'_{q-1}/c_q]^{(-1)^{q+1}} &= \prod_{q=0}^m ([b_q, \tilde{b}_{q-1}/c_q] [b'_q/b_q] [b'_{q-1}/b_{q-1}])^{(-1)^{q+1}} \\ &= \prod_{q=0}^m ([b_q, \tilde{b}_{q-1}/c_q])^{(-1)^{q+1}} ([b'_q/b_q] [b'_{q-1}/b_{q-1}])^{(-1)^{q+1}} = \prod_{q=0}^m [b_q, \tilde{b}_{q-1}/c_q]^{(-1)^{q+1}}. \end{aligned}$$

□

注意 7.6. 但し, $\tau(C_*)$ は C_* の基底の取り方による. 実際, 別の基底 $\mathbf{c}'_q$ を取ってきた時, 次の様な変換が知られている (証明は [北合森, Lemma 5.1.6]):

$$\tau(C_*, \mathbf{c}_q) = \tau(C_*, \mathbf{c}'_q) \prod_{q=0}^m [\mathbf{c}_q/\mathbf{c}'_q]^{(-1)^{q+1}}.$$

とはいえ、トポロジーの話では, 基底 $\mathbf{c}_q$ の取り方によらない場合ばかり考えるので, $\mathbf{c}'_q$ は略記する事が多い.

とはいえ、トーションというのも定義どおり計算するのは大概無理である。これはホモロジー論でも同様のノリであった。その様に、計算するには簡単な場合に帰着するか、テクニックが幾らか要る。そこで、簡単な場合に帰着できそうな補題を挙げておこう。

補題 7.7. もし複体が $0 \rightarrow C_3 \rightarrow C_2 \xrightarrow{0} C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ という形 (真中が 0) のとき、トーションは $\det(\partial_3)\det(\partial_1)$ になる。

補題 7.8. もし非輪状な複体 $0 \rightarrow A^m \rightarrow A^{m+1} \rightarrow A \rightarrow 0$ があって、ただし ∂_2 が $(A, \vec{w})$ という形で、 $\partial_1 = (\vec{v}, b)^T$ の切断の像が、 $\langle \vec{w} \rangle$ になっていたとする。ここで、 A は $m \times m$ 行列とする。

この時、トーションは、 $\det(A)/b$ になる。

演習 7.9. この補題ふたつを示せ (定義通りなので簡単です)。

また複体の完全系列に対して、次が成立する：

命題 7.10. $0 \rightarrow C'_* \rightarrow C_* \rightarrow C''_* \rightarrow 0$ を非輪状複体の完全系列とする。さらに、 $\mathbf{c}_q, \mathbf{c}'_q, \mathbf{c}''_q$ を C_q, C'_q, C''_q の基底とし、二つの写像 $\iota: C'_i \hookrightarrow C_i$ と $p: C \rightarrow C''_i$ に対し、自然なものとする。つまり

$$[\iota(\mathbf{c}'_q)\mathbf{c}''_q/\mathbf{c}_q] = 1$$

が成立したとする。この時、 $\tau(C) = \pm\tau(C')\tau(C'')$ 。

演習 7.11. 証明が少々長いですが、命題を示せ ([門上] に証明あり)。

7.3 CW 複体の Reidemeister トーション

X を有限 CW 複体とする。節 5.3 と同様に、アーベル化 $\pi_1(X) = G \rightarrow H = \pi_1(X)_{\text{ab}}$ をとり、付随する被覆空間 $\tilde{X}$ をとる。また準同型 $\varphi: \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{F}^\times$ を固定する。すると、局所系の複体が次のように取れる：

$$C_*: \cdots \rightarrow C_k(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} \mathbb{F} \xrightarrow{\tilde{\partial}_k} \cdots \rightarrow C_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} \mathbb{F} \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} \mathbb{F} \rightarrow 0$$

定義 7.12 (Reidemeister トーション). その複体が非輪状でないとき、 $\tau_\varphi(X) = 0$ と定める。他方で、非輪状であるとき、その複体のトーションを次の公式によって、部分乗法群 $\varphi(\pi_1(X))$ で割ったもので定義する：

$$\tau_\varphi(X) := \tau(C_*(\tilde{X} \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} \mathbb{F})) \in \mathbb{F}^\times / \varphi(\pi_1(X))$$

しかしこの定義では、CW 複体の構造によって見える。しかし、次の定理が知られている。

定理 7.13. 二つの CW 複体が、単体分割で移りあうとする。この時、二つの Reidemeister トーションは一致する。

証明は [Tu1, 定理 8.8] を見よ (授業でやるかも¹⁶)。但し、純代数的であり本質が見づらいが…。とはいえ、多様体の三角形分割は、単体分割で映りあうので、次が言える：

¹⁶証明の流れはこう：まず simple homotopy の定義をする。トーションはそれで不変である事を示す。そして単体分割が simple homotopy で書ける事を示す。

系 7.14. 二つのコンパクト多様体が同相とする. この時, 二つの Reidemeister トーションは一致する.

とはいえ, もっと強い事が示されている (面白い事に, 証明は解析を用いるというものである).

定理 7.15 (Chapman []). 二つの CW 複体間の同相写像 $h : X \rightarrow X'$ があったとする. この時, 二つの Reidemeister トーションは一致する: $\tau_\varphi(X) = \tau_{\varphi \circ h}(X')$.

さて, 以下に二つ例を挙げる ([Nic, §2.1] や [門上, 1 章章末] にもっと計算例がある):

例 7.16. $X = S^1 \times S^1$ のトーラスとする. 0-セルを b , 1-cell を x, y とし, 2-cell を u とする. $u = xyx^{-1}y^{-1}$ によって 1 セル接着した CW 複体とする. $\pi_1(X) = \langle x, y | xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ より, FOX 微分 (定理 5.18) から

$$\partial_2 : C_2(\tilde{X} \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} \mathbb{F}) \longrightarrow C_1(\tilde{X} \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} \mathbb{F}); \quad \tilde{u} \mapsto \tilde{x} \frac{\partial[x, y]}{\partial x} + \tilde{y} \frac{\partial[x, y]}{\partial y} = \tilde{x}(1 - \varphi(y)) + \tilde{y}(\varphi(x) - 1)$$

である. 次に, 定理 5.18 から, $\partial_1(\tilde{x}) = \varphi(x) - 1$, $\partial_1(\tilde{y}) = \varphi(y) - 1$ であった. なので, まとめると.

$$C_* : 0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{(1-\varphi(y), \varphi(x)-1)} C_1 \xrightarrow{(1-\varphi(x), 1-\varphi(y))^T} C_0 \longrightarrow 0$$

となる. なので $\det(1 - \varphi(x))$ と $\det(1 - \varphi(y))$ のどちらか一方が 0 でなければ非輪状になる.

ここで $\det(1 - \varphi(y)) = 0$ の場合を考える. そこで $b_2 := u$, $b_1 = x$, $b_0 = \emptyset$ とする. すると

$$[b_2/c_2] = 1, \quad [(\partial b_2)b_1/c_1] = \det \begin{pmatrix} 1 - \varphi(y) & 1 \\ -(1 - \varphi(x)) & 0 \end{pmatrix} = 1 - \varphi(x), \quad [(\partial b_1)b_0/c_0] = \det(1 - \varphi(x)).$$

よって, 非輪状になる際は, トーションの定義より $\tau_\varphi(C_*) = 1$ である.

演習 7.17. $n > 1$ で, $X = (S^1)^n$ として, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(H_1(X)) = \mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n)$ としたとき, そのトーションが 1 であることを示せ.

結び目の補空間に対し, 次の様に計算できる.

定理 7.18. X を結び目の補空間 $S^3 \setminus K$ とする ($H = \mathbb{Z}$ とし α はアーベル化とする). この時, Milnor トーションは Alexander 多項式に一致する: $\tau_\alpha(X) = \Delta_K(t)/(1 - t)$

Proof. 定理 6.17 にあった $\tilde{X}$ の複体を思い起こそう.

このホモロジーは $t - 1$ 倍や $\Delta_K(t)$ 倍で消えるのだったから, (普遍係数定理より) 商体の係数では $H_*(\tilde{X}; \mathbb{Q}(H))$ は 0 になる. 特に非輪状である. ここで切断は補題 7.8 の様に, とれる.

なので, トーションは $\tau_\alpha(X) = \det(tV - T^T)/(1 - t)$ となる. よって, $\Delta_K(t)$ の定義より, 定理が証明された. $\square$

また他方で, Mayer-Vietoris 系列から示される Gluing 公式というのがある.

定理 7.19. $Y, X_1, X_2 \subset X$ を部分複体で

$$X = X_1 \cup X_2 \quad \text{であって} \quad X_1 \cap X_2 = Y \quad \text{であるとする.}$$

また $\varphi : \mathbb{Q}(H_1(X)) \rightarrow \mathbb{F}$ に対して, 次の誘導射を考える:

$$j : \mathbb{Q}(H_1(Y)) \rightarrow \mathbb{Q}(H_1(X)), \quad j_k : \mathbb{Q}(H_1(X_k)) \longrightarrow \mathbb{Q}(H_1(X))$$

その誘導射による複体 $C_*(\tilde{X}) \otimes \mathbb{F}_q, C_*(\tilde{X}_k) \otimes \mathbb{F}_q, C_*(\tilde{Y}) \otimes \mathbb{F}_q$ が全て非輪状とする¹⁷. この時

$$\tau_\varphi(X) \cdot \tau_{\varphi \circ j}(Y) = \tau_{\varphi \circ j_1}(X_1) \cdot \tau_{\varphi \circ j_2}(X_2) \quad \text{up to } \pm \varphi(\pi_1(X)).$$

演習 7.20. 命題 7.10 を用いて, この証明を厳密に書きくだして下さい.

例 7.21. $X = S^1 \times S^2$ とし, 二つの solid torus T_1, T_2 に分ける.

$$H_1(T_i) \cong \langle t_i \rangle \cong \mathbb{Z}, \quad T_1 \cap T_2 = \partial T_1 = \partial T_2 \cong S^1 \times S^1$$

が成立する. $T_1 \cap T_2 \hookrightarrow T_1, T_1 \cap T_2 \hookrightarrow T_2$ を介して, $t = t_1 = t_2$ の関係式が入る.

$$\tau(S^1 \times S^2) = (t_1 - 1)^{-1}(t_2 - 1)^{-1}1 = (t - 1)^{-2}.$$

例 7.22. $X = S^1 \times S^n$ を考えよう. Gluing 公式を用いて, $n > 1$ の帰納法で, 次が示せる.

$$\tau(S^1 \times S^n) = \begin{cases} (t - 1)^{-2} & (n \text{ が偶数}) \\ 1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}.$$

閑話：発展的な話 Reidemeister トーションは, 体 $\mathbb{F}$ 上でなく, 環上でも定義できるが少し複雑になる. またトーションは相対版 (空間の組) で考えた方が, 応用上便利である.

また, Reidemeister トーションは Spin^c 構造つきで考える事が良い事が多い. 実際, トーションの一意性を示す公理系が存在する ([Nic, §3.7] 参照). 色々なものがそのトーションに等しい事を示す時に非常に役立つ.

7.4 CW 複体の Milnor トーション

X を連結なコンパクト CW 複体とする. CW 複体を知らなければ, 単体複体としてよい (実際, 或る単体複体にホモトピー同値である). また自由アーベル群 H への準同型 $\alpha: \pi_1(X) \rightarrow H$ を固定する. $\mathbb{Q}[H]$ を H の群 (可換) 環とし, $\mathbb{Q}(H)$ を商体とする.

α による局所系の複体を考える.

$$C_*: 0 \longrightarrow C_m(X) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} \mathbb{Q}(H) \longrightarrow C_{m-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} \mathbb{Q}(H) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} \mathbb{Q}(H) \longrightarrow C_0(X)$$

定義 7.23. もしこの複体が非輪状でない時, Milnor トーションを 0 と定義する. もし非輪状である時, Milnor トーションを次に値をもつものと定義する.

$$\tau(C_*) \in \mathbb{Q}[H]/\pm H$$

もっと, Alexander 多項式との関連を述べる. **Alexander 関数** とは, もし $\text{Tor} H_i(X; \mathbb{Q}(H)) \neq 0$ となる i があった時, 0 と定義し, もしそうでないときは次で定義する.

$$A_\alpha(X) := \prod_{i=0} \frac{\text{ord} H_{2i-1}(X; \mathbb{Q}(H))}{\text{ord} H_{2i}(X; \mathbb{Q}(H))} \in \mathbb{Q}(H).$$

定理 7.24. $A_\alpha(X) = \tau_\alpha(X) \in \mathbb{Q}(H)/\pm H$.

この証明は次の一般的な補題を示せばよい:

¹⁷Tureav の refied torsion を用いれば, この仮定は不要である.

補題 7.25. R をネーター整域とし, その商体 $\mathbb{K}$ が標数 0 とする. そして複体

$$\underline{C}: 0 \rightarrow C_m \rightarrow C_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

が自由 R 加群で, 次を仮定する:

$$\text{rank}_{\mathbb{K}} H_*(\underline{C}) = 0 \quad \text{つまり, } \text{Tor}(H_*(\underline{C})) = H_*(\underline{C}).$$

$\underline{C}$ の基底 $[c]$ をどうとっても次が言える.

$$\exists \zeta \in R, \quad \tau_\alpha(\underline{C}, c) = \zeta \prod_{j=0}^m \text{ord}(H_j(\underline{C}))^{(-1)^{j+1}}$$

Proof. 演習とする. [Mil4, Tu1, Nic] に純代数的な証明が書いてある. □

その系として, Milnor トーションは, 同相類より弱く, ホモトピー同値の不変量になっている.

系 7.26. X と X' がホモトピー同値であるとし, 二つの α は同じとする. この時, Milnor トーションは一致する: $\tau_\alpha(X) = \tau_\alpha(X')$

注意 7.27. 一般に, “Whitehead 群” というものが消えている時, Reidemeister トーションは, ホモトピー同値で不変な事が知られる ([Tu1, §2] 参照). ここで Whitehead 群 $\text{Wh}_1(\mathbb{Z}[G])$ は群 G に対し定義される. 以下, 事実を並べよう; もし G がアーベル振れ部分群を持つと, その Whitehead 群は消えない. しかし $G = H$ の時は消える事が (Bass, Heller, Swan) により示されている. なお結び目の基本群も $\text{Wh}_1(\mathbb{Z}[G]) = 0$ である. 一般に, ねじれ部分群のない群 G に対し, $\text{Wh}_1(\mathbb{Z}[G]) = 0$ と予想されているが今でも未解決.

なお (ミルナーによる) 当定理の証明は初等的な代数でも示されている ([Tu1, 定理 4.7 と 11.4] を見よ).

7.5 レンズ空間への応用.

レンズ空間の分類定理を述べる.

定理 7.28. $L(p, q)$ と $L(p, q')$ をレンズ空間とする.

1. この二つがホモトピー同値である必要十分条件は

$$\exists \ell \in (\mathbb{Z}/m)^\times, \quad \ell^2 q = q' \pmod{p}.$$

2. この二つが同相である必要十分条件は

$$q = q' \pmod{p}.$$

この小節では, 同相部分に関して, 証明を紹介する. Hatcher の 3 次元多様体の講義録 [H] に, 不変量を用いず (Seifert 構造を見て) 証明しているが, かなりテクニカルである. ここでは (2) の十分条件をライデマイスタートーションを用いて示す. まずその計算を実行してみよう:

例 7.29 (レンズ空間). $(p, q) = 1$ となる整数 p, q を固定する. レンズ空間 $L(p, q)$ を定義する. まず球面を

$$S^3 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

と設定して, そこに生成元 $\zeta \in \mathbb{Z}/p$ に対して,

$$(z, w) \diamond_{p,q} \zeta = (e^{\sqrt{-1}/2p\pi} z, e^{\sqrt{-1}q/2p\pi} w)$$

と定め, 自由な作用 $\mathbb{Z}/p \curvearrowright S^3$ を定める. レンズ空間 $L(p, q)$ はその商空間 $S^3/\mathbb{Z}_p$ で定める. これは向き付き 3 次元閉多様体である.

$L(p, q)$ の普遍被覆は定義より S^3 なので, $\pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p$ である. 特に, アーベル化とポアンカレ双対より, H_1 と H_2 も $\mathbb{Z}/p$ である.

また設定として, $\mathbb{F}$ を巡回拡大体 $\mathbb{Q}(\zeta)$ とし, φ を自然な埋込 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/p] = \mathbb{Z}[\zeta] \hookrightarrow \mathbb{Q}(\zeta)$ とする. $t := \varphi(\zeta)$ とおこう.

さて, この Reidemeister トーションを計算するうえで, S^3 の CW 複体から構造を見てみよう. 次を定める:

$$\begin{aligned} E_j^0 &:= \{(e^{j\sqrt{-1}/2p\pi}, 0) \in S^3\} \\ E_j^1 &:= \left\{ (e^{\sqrt{-1}\theta}, 0) \in S^3 \mid \frac{2\pi j}{p} \leq \theta \leq \frac{2\pi(j+1)}{p} \right\} \\ E_j^2 &:= \left\{ (z_1, se^{j\sqrt{-1}/2p\pi}) \in \mathbb{C}^2 \mid s \in \mathbb{R}, \sqrt{|z_1|^2 + s^2} = 1 \right\} \\ E_j^3 &:= \left\{ (z_1, z_2) \in S^3 \mid \frac{2\pi j}{p} \leq \arg z_2 \leq \frac{2\pi(j+1)}{p} \right\}. \end{aligned}$$

これは $\mathbb{Z}/p$ の作用で同変である. また E_j^k は k -ball になる事も確かめられ, CW 構造を与える. $c_j^k := \text{Int}(E_j^k)$ として, セル複体の基底と思おう. すると (セルに向きを入れて) 定義から境界準同型は以下となる:

$$\partial c_j^2 = \sum_{i=0}^{p-1} c_i^1, \quad \partial c_j^1 = c_{j+1}^0 - c_j^0, \quad \partial c_j^3 = c_{j+1}^2 - c_j^2.$$

ここで, E_j^k の定義から, 次に気づこう

$$\zeta \cdot E_j^k = E_{j+1}^k, \quad k \in \{0, 1\} \quad \zeta \cdot E_j^k = E_{j+q}^k, \quad k \in \{2, 3\}.$$

よって, 境界準同型は次のように整理される:

$$\partial c_j^2 = \left(\sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i \right) c_n^1, \quad \partial c_j^1 = (\zeta - 1) c_j^0, \quad \partial c_j^3 = (\zeta^r - 1) c_j^2,$$

ここで $rq \equiv 1 \pmod{p\mathbb{Z}}$ で r を定めた. 以上をまとめると, 複体は次となる.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta) \xrightarrow{1-\zeta^a} \mathbb{Q}(\zeta) \xrightarrow{1+\zeta+\dots+\zeta^{p-1}} \mathbb{Q}(\zeta) \xrightarrow{1-\zeta} \mathbb{Q}(\zeta) \longrightarrow 0.$$

ここで $\zeta^p - 1$ より, 真ん中の矢印は 0 である. また他の矢印は同型である. だから, 複体 C_*^φ は非輪状である. よって補題 7.7 を用いれば,

$$\tau_\varphi(L(p, q)) = (1 - t)^{-1} (1 - t^r)^{-1}.$$

ここで $H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p$ の生成元を $s^q = t$ となる様に取り換えると, 次の結論を得る:

$$\tau_\varphi(L(p, q)) = (1 - s^q)^{-1} (1 - s)^{-1}.$$

そこで二つ同相な $L(p, q)$ と $L(p, q')$ が与えられたとする. いま, $\varphi: \pi_1(L(p, q)) \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta)$ と $\varphi': \pi_1(L(p, q')) \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta)$ が同値だとすると, トーシヨンの結果から次を得る:

$$\exists u, k \in \mathbb{Z}, \quad t^u(1-t^r)(1-t) = (1-t^{kr'})(1-t)$$

を得る. u が厄介だが, 両辺の絶対値を取る事で次の様に消える:

$$(1-t^{-r})(1-t^{-1})(1-t^r)(1-t) = (1-t^{kr'})(1-t^k)(1-t^{-kr'})(1-t^{-k}).$$

主張 集合として, 等式 $\{1, -1, r, -r\} = \{k, -k, kr', -kr'\}$ が成立する.

この主張は簡単そうに見えるが, 次の数論的結果を用いないといけない.

補題 7.30 (Franz の補題). $S := \{j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid (j, p) = 1\}$. さらに $\mathbb{Z}$ の部分集合 $\{s_j\}_{j \in S} \subset \mathbb{Z}$ が次を満たすとする:

(1) $\sum_{j \in S} a_j = 0$ であって, $a_j = a_{-j}$.

(2) どの単位 p 乗根 $\zeta \neq 1$ に対して, $\prod_{j \in S} (\zeta^j - 1)^{a_j} = 1$ が成立する.

この時, $j \in S$ に対して $a_j = 0$ である.

注意 7.31. ディレクレ級数と, L 関数の性質を用いれば, 証明できるがトポロジストにとって難しい (門上氏の概論 [門上] を参照のこと). という訳で, たいがいの文献の様に省略する.

(主張の証明) $j \in S$ に対して, $m(j) := \#\{s \in \{1, -1, r, -r\} \mid s = j\}$ として, $m'(j) := \#\{s \in \{1, -1, kr', -kr'\} \mid s = j\}$ とする. $a(j)$ を差 $m(j) - m'(j)$ と置けば, 補題の条件を満たす. よって $0 = a(j)$ つまり $m(j) = m'(j)$ となって主張が示せた. $\square$

(2) の十分条件の証明. 主張を用いて議論を進めよう. r, r', k の取り方は 8 通りあるので, 矛盾の起きないものを洗い出せばよい.

その為に, 多項式 $P(T) \in \mathbb{C}[T]/(T^p - 1)$ を次のように取る:

$$P(T) = T^u(T-1)(T^r-1) - (T^k-1)(T^{kr}-1) \in \mathbb{C}[T]/(T^p-1).$$

例えば, $k=1$ かつ $kr' = -t$ の場合を考えよう. すると,

$$T^{u+r}(T-1)(T^r-1) = -(T^k-1)(T^r-1) \in \mathbb{C}[T]/(T^p-1). \quad (6)$$

なのだが, ここで注意すべき等式

$$(\zeta-1)\frac{1}{p}(1+2\zeta+\cdots+p\zeta^{p-1}) = 1 - \left(\sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i/p\right)$$

に注意すれば, (6) は

$$(T^{u+r}+1)\left(1 - \left(\sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i/p\right)\right) = 0$$

となるが, これはあり得ない. よって $k=1$ かつ $kr' = -t$ の場合は矛盾する.

演習 7.32. $r = \pm r'$ を示せ. つまり他の場合では矛盾する事を示せ.

この演習を示せば $q = \pm q'$ となる事が解り, 証明が了わる. $\square$

ちなみに, (1) の証明も述べておこう.

(1) の証明. 十分性は, 次の節の例 8.7 の不変量から即座に示される.

なので必要性を示そう. $q \neq \pm \ell^2 q \pmod{p}$ と仮定しよう.

用語を準備する. $(p, k_i) = 1$ となる $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ に対して, 連続写像 $f_{k_1, k_2} : S^3 \rightarrow S^3$ を

$$f_{k_1, k_2}(z_1, z_2) = (|z_1|^{1-k_1} z_1^{k_1}, |z_2|^{1-k_2} z_2^{k_2})$$

と定める. すると, f_k は次数 $k_1 k_2$ であって, 同変性も示される:

$$f_{k_1, k_2}(\zeta \diamond_{r, x}(z_1, z_2)) = \zeta \diamond_{k_1 r, k_2 x}(z_1, z_2).$$

この写像は $[f_{k_1, k_2}] : S^3 / \diamond_{r, s} \rightarrow S^3 / \diamond_{k_1 r, k_2 s}$ を誘導する. $p \in S^3$ と, p を中心とする小球 B で, $\forall k < p$ に対し $\zeta^k \diamond_{r, s} B \cap B = \emptyset$ となるものを取る. そこで

$$U := \cup_{k=0}^{p-1} \zeta^k \diamond_{r, s} B.$$

..... (Under construction)

□

8 双線形形式の不変量.

この節では, Alexander 多項式よりさらに精密化した不変量、Blanchfield ペアリングを紹介する.

8.1 代数的準備 : 双線形形式.

本節では, R を可換環とし, $\bar{\cdot} : R \rightarrow R$ を対合 (involution) とする¹⁸.

M を有限生成 R 射影加群として固定する.

定義 8.1. • $\mathbb{Z}$ -双線形写像 $\psi : M \times M \rightarrow R$ が対合的であるとは, 次を満たす時をいう.

$$\forall a, b \in R, \quad m, n \in M, \quad \psi(am, bn) = a\bar{b}\psi(m, n).$$

• 対合的双線形写像 $\psi : M' \times M' \rightarrow R$ が与えられ, ψ と ψ' が同値であるとは, ある R -同型 $f : M \rightarrow M'$ があって, $\psi(a, b) = \psi'(f(a), f(b))$ を満たすことをいう.

• ψ が対称的 (Hermitian) であるとは, $\psi(a, b) = \overline{\psi(b, a)}$ を満たすことを言う.

例 8.2. M が自由加群 R^n で基底を $a_1, \dots, a_n$ を取る. すると $b_{ij} := \psi(a_i, a_j)$ として, $n \times n$ 行列 $B = \{b_{ij}\}_{i, j \leq n}$ が考えられる. もう一つ $n \times n$ 行列 $B' = \{\psi'(a_i, a_j)\}_{i, j \leq n}$ も考えよう. この時, ψ と ψ' が同値であるとは, 次と同値である:

$$\text{ある正則な行列 } O \text{ があって, } \overline{O}^T B O = B'.$$

例 8.3. $R = M = \mathbb{Z}/m$ とし, $\bar{\cdot} = \text{id}_R$ とする. ある $A \in \mathbb{Z}/m$ があって, $\psi(x, y) = Axy$ と書ける. 他方で $\psi'(x, y) = A'xy$ が書けたとする. この時, ψ と ψ' が同値である必要十分条件は, $\exists \ell \in (\mathbb{Z}/m)^\times, A = \ell^2 A'$ である.

¹⁸つまり, $\bar{a} = a$ であり, $\bar{\cdot}$ は加群同型とする. $\bar{\cdot} = \text{id}_R$ でもよい.

双線形形式の研究は、この同値類を分類したり、量を取り出す事である。¹⁹。しかし、非常に難しいし、わかったとしても証明は長くない。ここでは知られている事をリストアップしておこう：

定理 8.4 (Sylvester の慣性則). R を次数体 $\mathbb{R}$ とし, $\bar{\cdot} = \text{id}_R$ とする. この時, 任意の対称 ψ に対して, ある m, n が一意にあって, 次の対角行列で表される双線形形式と同値である.

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ 個}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{m \text{ 個}}, 0, \dots, 0)$$

- $R = \mathbb{Z}$ のとき, indefinite²⁰ な対称形式 ψ は, タイプと, 符号数で分類される (Serre の分類定理).
- M が有限アーベル群で, $R = \mathbb{Z}/m$ の形のとき, 対称形式 ψ は分類されている.
- R が数体 ($\mathbb{Q}$ の有限次拡大体) とする時, 対称形式 ψ は分類されている (東大セミナーノート [] 参照).
- R が体とし, 同型射 $t: R \rightarrow R$ があって $\psi(ta, tb) = \psi(a, b)$ を満たすものがあるとき, 組 (ψ, t) を **isometry** という. 体上の対称的な isometry は Milnor[] により分類されている.

8.2 Linking 型式.

M を n 次元向き付き閉多様体とする.

まず準備として, 交叉形式を復習しよう. ポアンカレ双対 P.D.: $H_k(N; \mathbb{Z}) \cong H^{n-k}(N; \mathbb{Z})$ とする. この時, 交叉形式とは次の双線形形式で定義された

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : H_k(N; \mathbb{Z}) \times H^{n-k}(N; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (p, q) \mapsto \text{P.D.}^{-1}(\text{P.D.}(p) \smile \text{P.D.}(q)).$$

これは次の様な幾何的意味がある. つまり p を k -cycle とし q を $(n-k)$ -cycle とし, それが二つに横断的に交わっていたとすると, 交叉形式はその交点数の和と一致する.

次に, アーベル群 P に対して, 捩れ部分群を次の様に書こう：

$$TP := \{p \in P \mid \exists a \in \mathbb{Z} \text{ } ap = 0\}.$$

すると交叉形式とは, ホモロジーの捩れ部分から $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に値を持つ双線形形式

$$L_N : TH_\ell(N; \mathbb{Z}) \times TH_{n-\ell-1}(N; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

として定義される (次数に注意). その定義は以下の様: $[x] \in TH_\ell(N; \mathbb{Z})$ と $[y] \in TH_{n-\ell-1}(N; \mathbb{Z})$ を代表するようなサイクル $x \in C_\ell(N; \mathbb{Z})$ と $y \in C_{n-\ell-1}(N; \mathbb{Z})$ に対して, $w \in C_{n-\ell}(N; \mathbb{Z})$ を $\exists s \in \mathbb{Z}$ で $\partial w = sy$ となるものを取る.

$$L_N(x, y) := \langle x, w \rangle / s \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

定義から気づきたい事に, もし N と N' がホモトピー同値のとき, L_N は一致する.

¹⁹ ついでながら, 歪対称的な場合を言及すると, [?, 定理??] にある通り, シンプレクティック型式ですぐ分類されやすい. その為, 多くの場合, 対称的な場合を考える.

²⁰ ψ を $\otimes \mathbb{R}$ した後, Sylvester の慣性則により, 正の固有値が全て

命題 8.5. この定義が, x, y, w, s の取り方によらない. さらに双線形であり, 非退化である.

Proof. まず welldefined と双線形を示す. 単完全系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

のボクシュタイン作用素を考えよう: $B : H_{k+1}(N; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H_k(N; \mathbb{Z})$. その B の像は, $H_k(N; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(M; \mathbb{Q})$ の核に等しい. つまり, $TH_k(N; \mathbb{Z})$ に一致し, さらに定義より

$$L_N(x, y) = B^{-1}(x) \bullet y,$$

となる. ここで $\bullet : H_{k+1}(N; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes H_k(N; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は交叉形式とする. したがって, x の B による代表元 u, u' に対して, $(u - u') \bullet y = 0$ を示せばよい. しかし, $u - u'$ が $v \in H_2(N; \mathbb{Q})$ からとする $v \bullet y = 0$ ($\because y \in H_k(N; \mathbb{Q})$ の像は自明) という事実に気づけばよい.

次に非退化性を示そう. 次の可換図式に気づこう:

$$\begin{array}{ccccc} H_{k+1}(N; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{Poincaré 双対}} & H_{n-k-1}(N; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{evaluation}} & \text{Hom}(H_{n-k-1}(N), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow B & & & & \downarrow \text{制限} \\ \text{Tor} H_k(N; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\hat{\lambda}} & & & \text{Hom}(\text{Tor} H_{n-k-1}(N; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \end{array}$$

ここで $\hat{\lambda}$ は $x \mapsto L_N(x, -)$ という随伴写像とする. ここで $\hat{\lambda}$ は全射なので, よって, 全単射である. よって, この同型性から, 非退化を意味する. $\square$

演習 8.6. 対称性 $L_N(y, x)(-1)^{n(n-k)} L_N(x, y)$ が知られている. それを示せ.

1 つ計算例を出した後に, 色々な知られている性質を見ていこう:

例 8.7. $L(p, q)$ を 3 次元レンズ空間とする. $TH_1(L(p, q); \mathbb{Z}) = H_1(L(p, q); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p$ を思い起こし, その生成元を θ とする. するとリンク型式は次となる.

$$L_N(\theta, \theta) = -q/p.$$

Proof. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とし, 整数 p, q, r, s が $pr - qs = 1$ を満たすとする. 次の同相写像を考える.

$$f : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1, \quad (z, w) \longmapsto (z^q w^p, z^s w^r).$$

加えて, $U_1 := D^2 \times S^1$, $U_2 := S^1 \times D^2$ とする. 境界 ∂U_i を $S^1 \times S^1$ とみなし, 同値関係

$$x_1 \sim x_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_2 = f(x_1) \quad x_i \in \partial U_i.$$

を考える. すると, この商空間 $U_1 \sqcup U_2 / \sim$ はレンズ空間 $L(p, q)$ と同相である (演習とする²¹). $H_1(U_1) \cong \mathbb{Z}$ と $H_1(U_2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を夫々 μ と $\mathcal{K}$ とおく. 次の完全列に気づく:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mu \xrightarrow{p} H_1(U_1) \longrightarrow H_1(L(p, q)) \longrightarrow 0.$$

他方で, レンズ空間内で見えた類 $[\mathcal{K}] \in H_1(L(p, q))$ をとると, $p\mathcal{K}$ は $U_1 = D^2 \times S^1$ の 2-core (ないしザイフェルト膜に) 張られる (例えば Mayer-Vietoris 完全列を見よ). 特に, 次を得る:

$$\text{lk}([\mathcal{K}], [\mu]) = 1/p.$$

²¹Dehn 手術を知っている人向け: レンズ空間は (p/q) -手術したものと見做せる

ここで気づきたい事に, $[\mu]$ が $H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p$ の生成元なので, ある $x \in \mathbb{Z}/p$ があり, $[K] = x[\mu]$ と書ける. x を調べよう. まず f の誘導射 $f_*: H_*(\partial U_1) \rightarrow H_*(\partial U_1) \cong \mathbb{Z}\langle \mu, \lambda \rangle$ の行列表示は, $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ に気づこう. 特に, この行列表示から次の対応が見れる:

$$\mu \mapsto p\mu + q\lambda, \quad K \mapsto r\mu + s\lambda \in H_1(\partial U_1).$$

$\lambda \in H_1(U_1)$ はゼロなので, $[K] = s[\mu]$ である. $s = -q^{-1} \bmod p\mathbb{Z}$ より, 次の式が得られ, それに q 倍する事で, 結論を得る:

$$L_N(-q^{-1}\mu, \mu) = 1/p.$$

□

注意 8.8. 単連結で $H_2(M; \mathbb{Z}) = TH_2(M; \mathbb{Z})$ となる 5 次元多様体に対して, リンキング型式で全てが分類されている事が知られている.

有限アーベル群 T に対し, 非退化な双線形型式 $b: T \times T \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を考える. $b(x, y) = b(y, x)$ のとき対称といい, $b(x, y) = -b(y, x)$ のとき歪対称という. 対称の場合 [Wall] も, 歪対称の場合 [Kawauchi-Kojima] も完全に b が分類されている.

3 次元多様体の場合, ヒーガード図式からリンクング型式を決定する方法がある [].

またライデマイスタートーションから, リンキング型式が (ほぼ) 書ける事が知られている:

定理 8.9 ([Tur]). M が閉 3 次元多様体とし, ベッチ数が $\beta_1(M) = 0$ とする. また有限アーベル群 $H := H_1(M; \mathbb{Z})$ とする. この時, 次が成立する:

$$\forall g, g' \in H, \quad \tau(M) \cdot (g - 1)(g' - 1) = -\lambda_M(g, g') \cdots \Sigma_H \in \mathbb{Q}[H]/\mathbb{Z}[H],$$

ここで右辺の Σ_H は $\sum_{h \in H} h$ と定義される.

8.3 Blanchfield 型式.

Blanchfield 型式 [?] について, 急ぎ足で紹介する. 良い文献として [Hil, Kaw, ?, ?] などある.

X を連結で有向コンパクト多様体とし (境界はあっても良い), 全射準同型 $\pi_1(X) \rightarrow \Gamma$ を固定する. ここで Γ は自由アーベル群とする. そして $\tilde{X}$ をそれに付随するアーベル被覆とする. また $\mathbb{Z}[\Gamma]$ を Γ の群環とし, $\mathbb{Q}(\Gamma)$ をその商体とする. また, $\tilde{X}$ のセル複体は X の $\{t^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ コピーと思え, $H_k(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は局所系ホモロジー群 $H_k(X; \mathbb{Z}[\Gamma])$ と同一視できる (いわば, Shapiro の補題の特殊版である).

すると, **Blanchfield 型式** とは, $\tilde{X}$ のホモロジー ($\mathbb{Z}[\Gamma]$ 加群) 上の双線形型式である:

$$\text{Bl}: \text{Tor}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(H_\ell(\tilde{X}; \mathbb{Z})) \times \text{Tor}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(H_{n-\ell-1}(\tilde{X}, \partial \tilde{X}; \mathbb{Z})) \longrightarrow \mathbb{Q}(\Gamma)/\mathbb{Z}[\Gamma].$$

その定義は以下の様. 二つのホモロジー類

$$[x] \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(H_\ell(\tilde{X}; \mathbb{Z})) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(H_\ell(X; \mathbb{Z}[\Gamma]))$$

$$[y] \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(H_{n-\ell-1}(\tilde{X}, \partial \tilde{X}; \mathbb{Z})) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(H_{n-\ell-1}(X, \partial X; \mathbb{Z}[\Gamma]))$$

が, $x \in C_\ell(X; \mathbb{Z}[\Gamma])$, $y \in C_{n-\ell-1}(X, \partial X; \mathbb{Z}[\Gamma])$ で代表されたとする. この時, 或る $\Delta \in \mathbb{Z}[\Gamma]$ と $w \in C_{n-\ell}(X, \partial X; \mathbb{Z}[\Gamma])$ があって, $\Delta y = \partial w$ と取れる.

$$\text{Bl}([x], [y]) = \sum_{g \in \Gamma} \langle x \cdot g, w \rangle / \Delta \in \mathbb{Q}(\Gamma)/\mathbb{Z}[\Gamma].$$

ここで $\langle -, - \rangle$ は $\tilde{X}$ 内の交叉形式で, $\cdot g$ は被覆変換で

演習 8.10. この定義が well-defined である事を示せ (x, y, Δ の取り方によらない).

演習 8.11. この Blanchfield ペアリングが非退化である事を示せ (証明は, [, 定理 D.3] に書いてある.)

演習 8.12. 対称性 $\overline{Bl(y, x)} = (-1)^{n(n-\ell)+1} Bl(x, y)$ が知られている. それを示せ. (証明は, [, 補題 D.1] 参照.)

例 8.13 (結び目の場合). ここでは, 結び目 $K : S^{2k-1} \hookrightarrow S^{2k+1}$ に関し $X = S^{2k+1} \setminus \text{Im} K$ とおき, f をアーベル化 $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z} =: \Gamma$ とした場合を考察する.

すると Mayer-Vietoris 系列より $H_*(X; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^1; \mathbb{Z})$ がすぐ解るため, Wang 完全列から, $H_k(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は捩れ $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -加群だとわかる. その annihilate する最小多項式を $\Delta_K \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ とかき, ($\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 版) **Alexander** 多項式と呼ぼう (但し Δ_K は $\pm t^{\pm n}$ 倍の取り方の差がある). すると, 局所系の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \xrightarrow{\Delta_K\text{-倍}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K \longrightarrow 0$$

が誘導する境界準同型 δ_* は, 同型 $H_{k+1}(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K) \cong H_k(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ を与える. そこで, 次の同型射たちの合成をえる:

$$\begin{aligned} H_k(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) &\xrightarrow{\delta_*^{-1}} H_{k+1}(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K) \xrightarrow{\text{Poincaré duality}} H^k(X, \partial X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K) \rightarrow \\ &\longrightarrow H^k(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K) \longrightarrow \text{Hom}(H_k(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]), \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K). \end{aligned}$$

最後の写像は ($\text{Ext}^0 \cong 0$ と) 普遍係数定理により得られる同型射であり, 3 番目ののは, 自然な写像 $(X, \emptyset) \rightarrow (X, \partial X)$ の引き戻しである. すると, (古典的) **Blanchfield** ペアリングとは, この合成写像に随伴する双線形形式として定義される:

$$\text{Bl}_K : H_k(X_\infty; \mathbb{Z})^{\otimes 2} = H_k(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K.$$

双線形形式 Bl_K は定義から非特異 (non-singular) であり, Hermitian である. 特に, 対称性 $\overline{\Delta_K} = \Delta_K$ がわかる.

この Bl_K は半世紀ほど前によく研究され, 高次元結び目では強力な不変量であることが示されている (詳細は [Hil, ?] を参照). 有名な結果例を列挙する.

- Bl_K は, 被覆空間 X_∞ の交叉形式によって定義できる. 特に, “Seifert 行列” という或る $\mathbb{Z}$ 上交差形式が解った場合, Bl_K は行列表示可能である ([Hil, ?] 等参照).
- 量子不変量が現れる前史では, 結び目の鏡像性や可逆性の判定などに強力な手法であった.
- $k \geq 2$ に対し, 次元 $2k - 1 \geq 3$ のふたつの結び目 K_1 と K_2 が単純とする (つまり, $\pi_2(X) \cong \cdots \cong \pi_{k-1}(X) \cong 0$). このとき, K_1 と K_2 がイソトピーで移りあう事と, Bl_{K_1} と Bl_{K_2} とが同型である事は同値である [?].
- $k \geq 2$ に対し, 結び目のコボルディズム群が “相対 Witt 群”²² に同型で, $\bigoplus^\infty \mathbb{Z} \oplus (\bigoplus^\infty \mathbb{Z}/2) \oplus (\bigoplus^\infty \mathbb{Z}/4)$ と同型である. これは Blanchfield ペアリングらで生成される ([?] など参照).

²²Witt 群とは, おおよそ, 有限生成射影加群上の 2 次形式全体の Grothendieck 群で定義される. この相対版もある.

9 付録：基本群、CW 複体、被覆空間の復習.

授業で復習するが、ここでは省略。など参照。

定義 9.1 (CW 複体). まず次の二つの記号を固定する:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 \leq 1\}, \quad \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = 1\} = S^{n-1}.$$

位相空間 X が CW-複体とは、空間の部分列

$$\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$$

で (ここで最後の等式は、弱位相が X と同相を意味する) 次を満たす時を言う。

1. X^0 は点の集合で、離散位相となる。
2. 空間 X^n (n -skeleton と呼ばれる) が定義されたと仮定する。添字集合を I_n があって、各 $\alpha \in I_n$ に対して胞体の接着写像

$$\varphi_\alpha : \partial D^n = S^{n-1} \rightarrow X^n$$

が与えられ、 X^{n+1} は次の様にかける:

$$X^{n+1} = X^n \cup \bigsqcup_{\alpha \in I_n} \varphi_\alpha \left(\bigsqcup_{\alpha \in I_n} D^n \right) = X^n \sqcup \bigsqcup_{\alpha \in I_n} D^n / (\partial D^n \ni x \sim \varphi_\alpha(x)).$$

例えば、多様体は CW 複体である。空間に CW-複体構造が入っていると、(胞体) ホモロジー群が計算しやすいので、大事である。他にも CW 複体だと良い性質が多い。

X を位相空間として、一点 $x \in X$ を固定する。

$$\pi_1(X) := \{(S^1, *) \rightarrow (X, x) \mid \text{連続かつ } f(*) = x\} / (\text{rel. ホモトピー})$$

もし X が弧状連結な時、基点の取り方によらないことがよく知られている。ここには自然な群構造が入る (単位元は一点写像)。 $\pi_1(X)$ を基本群という。

有限表示群 $G = \langle g_1, \dots, g_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ に対して次の様な連結な CW 複体 X s.t. $\pi_1(X) \cong G$ が作れる。まず一点 x_0 を固定して、 X_1 を S^1 の n 個ブーケ $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ とする。次に、 $r_i = g_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots g_{i_k}^{\epsilon_k}$ に対して、正 k 多角形 $|a_0 \cdots a_k|$ を持ってきて、辺 $|a_{j-1}a_j|$ を j 番目の S^1 と同一視する (但し、 $\epsilon_j = 1$ のとき向きに合わせ、 $\epsilon_j = -1$ のとき向きを逆に合わせ、貼りつける)。この出来上がった空間を X と置くと、CW 複体である。さらに、ファンカンペンの定理から、 $\pi_1(X) \cong G$ となる。

逆に、 X をコンパクト連結な CW 複体とする。まずホモトピー同値を除けば、 X の 0 スケルトンは一点として良い。すると、 X の 1 スケルトンは、 S^1 の n 個ブーケ $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ で掛ける。また、任意の 2-cell に対して、ある正 k 多角形 $|a_0 \cdots a_k|$ にホモトピー同値で、各辺が各 1-cell に一致するようにできる。すると上記と同じ議論をすれば、 $\pi_1(X) \cong G$ となるようにできる。

次に被覆空間について復習する: ざっと単語だけ羅列しておく:

定義 9.2 (被覆空間など). • 連結位相空間 C から X への連続全射 $p: C \rightarrow X$ が被覆写像であるとは、すべての点 $x \in X$ に対し x の開近傍 U が存在し、逆像 $p^{-1}(U)$ が共通部分をもたない C の開集合の和集合で表され、各開集合が p の制限写像により U と同相であることをいう。このとき C を被覆空間という。

- **Deck 変換**とは同相写像 $g: C \rightarrow C$ で $p \circ g = p$ を満たすものをいう。Deck 変換で生成される群を、被覆変換群という。
- 被覆 p が正則 (**regular**) であるとは、 $p_*: \pi_1(C) \rightarrow \pi_1(X)$ の像が、 $\pi_1(X)$ の正規部分群である時を言う。これは同値な事に、任意の $x \in X$ に対し、被覆変換群の $p^{-1}(x)$ への作用が推移的なことである。
- **普遍被覆**とは $\pi_1(\tilde{X}) = 1$ となる空間 $\tilde{X}$ から被覆写像 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ をいう。

次は基本である。

命題 9.3. X を連結な CW 複体とする。 $\pi_1(X)$ の任意の部分群 H に対し、ある被覆 $p: Y \rightarrow X$ が存在し、 $p_*(\pi_1(Y)) = H$ である。

X 上の被覆空間の同型類は、 $\pi_1(X)$ の部分群の共役類の集合に、1 対 1 対応である。

命題 9.4. X を連結な CW 複体とする。この時、普遍被覆空間 $\tilde{X}$ が存在する。また他の普遍被覆空間 $\tilde{X}'$ があった時、同相写像 $h: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ があり、 $p' \circ h = p$ となる。

また、正則な被覆写像 $p: C \rightarrow X$ の被覆変換群は $\pi_1(X)/p_*(\pi_1(C))$ である。とくに、 $C = \tilde{X}$ のとき、 $G = \pi_1(X)$ である。

参考文献

- [Adams] C. Adams, The Knot Book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots. W. H. Freeman and Company, New York, 1994 (または金信訳「結び目の数学」培風館, 1998).
- [Bro] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **87**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [CF] R. H. Crowell and R. H. Fox, Introduction to Knot Theory, Ginn and Co. 1963, or Grad. Texts Math. 57, Springer-Verlag, 1977 (または寺阪一野口訳「結び目理論入門」岩波書店, 1967).
- [FV] S. Friedl and S. Vidussi. *A survey of twisted Alexander polynomials*. Preprint 2010, 42 pages. arXiv:0905.0591.
- [Gor] Gordon, *Some aspects of classical knot theory*, Lecture Notes in Mathematics 685, Springer-Verlag 1–60
- [Hat] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2002).
- [Hil] J. Hillman, *Algebraic Invariants of Links*, Series on Knots and Everything, 2-nd edition.
- [服部] 服部 晶夫, 位相幾何学 (岩波基礎数学選書)
- [加藤] 加藤三吉 位相幾何学 裳華房
- [門上] 門上 晃久, **Reidemeister torsion の利用法 (How to use the Reidemeister torsion)**, theset.las.osaka-sandai.ac.jp/fledglings/notes/kadokami.pdf で閲覧可能
- [Kaw] A. Kawauchi (ed), A Survey of Knot Theory, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. (日本語の本もあるが、英語の方が豊富)
- [河内] 河内明夫, 線形代数からホモロジーへ, 培風館, 2000.
- [Lic] W. B. Lickorish, An introduction to knot theory, Graduate Texts in Mathematics, 175. Springer-Verlag, New York, 1997. 日本語訳もある。
- [Lin] X.S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), 361–380.
- [Lyn] R. Lyndon, *Cohomology theory of groups with a single defining relation*, Ann. of Math. (2) **52**, (1950). 650–665.
- [Mas] G. MASSUYEAU *AN INTRODUCTION TO THE ABELIAN REIDEMEISTER TORSION OF THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS*, arXiv:1003.2517v2 [math.GT] 12 Oct 2010.
- [McC] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **58**. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [Mil1] J. Milnor, *Infinite cyclic coverings*,
- [Mil2] ———, Milnor J., A duality theorem for Reidemeister torsion, Ann. of Math. (2), **76**, 1962, 137–147.
- [Mil3] ———, . Milnor, J., Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, Ann. of Math. (2), **74**, 1961, 575–590.

- [Mil4] ———, Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, 1966, 358–426.
- [村杉] 村杉邦男, 結び目理論とその応用, 日本評論社, 1993.
- [北合森] 北野 晃朗; 合田 洋; 森藤 孝之, ねじれ Alexander 不変量, 数学メモアール第 5 巻 <http://mathsoc.jp/publication/SugakuMemoirs/> で入手可能.
- [Ni] Yi Ni, *Knot Floer homology detects fibred knots*, *Invent. Math.* 170 (2007), no. 3, 577–608.
- [Nic] L. I. Nicolaescu. The Reidemeister torsion of 3-manifolds, volume 30 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003.
- [NY] F. Nagasato and Y. Yamaguchi: On the geometry of the slice of trace-free $SL_2(\mathbb{C})$ -characters of a knot group, *Math. Ann.* 354 (2012), 9671002.
- [OS] Peter S. Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and genus bounds*, *Geom. Topol.* 8 (2004), 311–334,
- [OSJS] 大城佳奈子, 清水理佳, 張娟姫, 鈴木咲衣, *Alexander 多項式について*, 第 4 回琵琶湖若手数学者勉強会 B 班の報告書. ネット上で入手可
- [Rei] Kurt Reidemeister. *Homotopieringe und Linsenräume*. *Abh. Math. Semin. Hamb. Univ.*, 11:102–109, 1935.
- [Rol] D. Rolfsen, *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing, 2003.
- [鈴木] 鈴木晋一, 結び目理論入門, サイエンス社, 1991.
- [Tro] H. F. Trotter, *Homology of group systems with applications to knot theory*, *Ann. of Math.* **76** (1962), 464–498.
- [Tu1] Turaev V., *Introduction to combinatorial torsions*, *Lectures in Mathematics ETH Zürich*, Notes taken by Felix Schlenk, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [Tu2] Turaev V., *Torsions of 3-dimensional Manifolds*, Springer
- [Tu2] V. Turaev. *Reidemeister torsion in knot theory*. *Uspekhi Mat. Nauk*, 41(1):97-147, 240, 1986 (in Russian). English translation: *Russian Math. Surveys*, 41:119-182, 1986.
- [Yj] Yajima, *On a characterization of knot groups of some knots in $\mathbb{R}^4$* , *OJM*